

Юрий Колкер
РОМАН С ДУНАЛИЕЛЛОЙ

ЗАМЕТКИ ХИЛОМАТИКА

к учёной статье, написанной им в 1986 году в иерусалимском Еврейском университете:
[Yuri Kolker. The Journal of Mathematical Biology, 1987, 25: 543-551.](#)

Где цвела сто лет подряд
Мать-и-мачеха,
Расцветает невпопад
Математика. (1969)

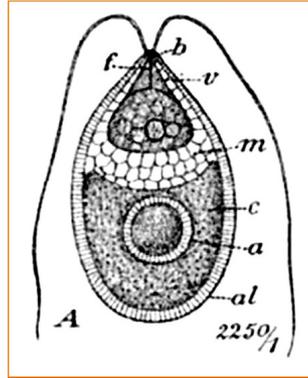
...Всю мою жизнь я отделял формулы от текста, а текст от формул. Отсюда — моя вечная обида на бога и на себя, — память подводит, формулы без оправы тускнеют, а соображения мои, не всегда никчёмные, забываются, утрачиваются, — обидно! Да пусть бы они и никчёмные были. Никчёмные — да мои. Я — математик-любитель, психоматик, филоматик, хиломатик. Таланта не удостоился. Люблю математику безответной любовью. Учёная степень не делает человека учёным; не сделала и меня. Но ещё сильнее я люблю слова; они были и остаются содержанием моей жизни.

Сейчас вижу, что моя *общая тетрадь* № 5 (1), ещё советская, за 42 копейки, сделанная в Литве на бумажной фабрике имени Юлюса Янониса... — разве я знал тогда это имя? литовский поэт, погибший мальчишкой в мае 1917 года, на двадцать втором году жизни, — ...моя первая, говорю, израильская тетрадь для университетских нужд, с рыжеватой обложкой, была дневником с формулами и текстом, скудным текстом на трёх языках (кое-что там на плохом английском написано, кое-что на младенческом иврите), — а будь этот дневник не столь скуден, формулы бы ожили. Если б я слова как следует писал да ещё даты ставил, было б куда веселей... Ну, да я сейчас этим займусь. Сегодня пятое ноября 2019 года...

Первым делом нужно представить героиню, мою возлюбленную. Она — гений чистой красоты, но при ближайшем рассмотрении — существо одноклеточное и выглядит примерно так, если её многократно увеличить в размере:



Или — так, в схематическом изображении, в разрезе:



Это милое растение — микроводоросль *дуналиелла*, названная в честь своего первооткрывателя Мишеля-Фелиса Дюналя (1789-1856). Обычный размер одного организма — 8-11 микрометров, то есть около тысячной доли миллиметра. Как такую не любить?!

Я не знал имени Дюналя, когда принимался за опыты с дуналиеллой; спросить о происхождении названия микроводоросли не догадался; не до того было. Познакомил меня с дуналиеллой профессор Бен-Цион Гинцбург в 1985 году, в лаборатории биофизики растений Еврейского университета в Иерусалиме. Экспериментатор я отроду никакой, ни разу в жизни не ставил никаких опытов над материей, разве что над душевной, в науке тяготел к теории, учёным, в настоящем смысле этого слова, стать не успел, не сумел по нехватке таланта, хоть и не без вмешательства обстоятельств — нужно ли объяснять, каких? Я родился и жил под серпом и молотом... Но, конечно, настоящие учёные и там выживали.

Никакой наукой я не занимался к началу 1985 года уже около двенадцати лет. Однако ж тут, в Иерусалиме, я словно бы живой воды напился или из машины временны вылез, — в возрасте 38 лет почувствовал себя юношей, даже ребёнком из-за моего невладения языками и практической беспомощности в мире совершенно для меня новом. Обстоятельства на этот раз мне благоприятствовали: меня приняли в университет. А я давно, со времени моей дипломной работы при окончании физ-меха, мечтал увидеть живую сигмоидальную ростовую кривую типа логистической.

В лаборатории нашёлся хемостат. Бенц Гинзбург объяснил мне, как поддерживать культуру в хемостате, научил измерять плотность культуры в единицах Клетга с помощью оптического прибора, — и я очертя голову кинулся в омут.

Нечего и говорить, что с этим новым для меня делом я не справился. Все три моих долгих опыта были выполнены топорно, культура быстро загрязнялась, несколько раз всё приходилось начинать сначала, а Бенц Гинзбург был занят своими делами, предоставил меня самому себе, не хотел вразумить. В сущности, он, вероятно, ставил опыт надо мною. Перед ним было существо неведомое: беженец из Совдепии, отказник, десять лет добивавшийся выездной визы, добившийся её с немалым риском, в Сибирь мог угодить, — и, добившись, зачем-то, не будучи сионистом, приехавший в Израиль, хотя перед ним были открыты двери во все уголки мира, и в США его ждали нешуточные льготы. Профессору Гинцбургу, сабре, уроженцу Израиля, участнику многих войн, человеку, с детства свободному (он, по его словам, никогда и нигде не сталкивался с антисемитизмом: ни дома, ни в университетах по обе стороны Атлантики), было любопытно посмотреть на особь неведомого социологического вида. Я был для него куда загадочнее дуналиеллы.

После долгих трудов и приступов отчаяния, когда хотелось всё бросить, я всё-таки получил три вожделенных ростовых кривых, итог трёх опытов с дуналиеллой, и приложил к ним, для их математического описания, пять простых дифференциальных уравнений, из которых одно было придумано мною и никогда до меня не применялось.

Сравнение моделей обнаружило, что моя свежееиспечённая модель не хуже других; применительно к одному из моих опытов она даже лучшей оказалась.

Вот эти уравнения:

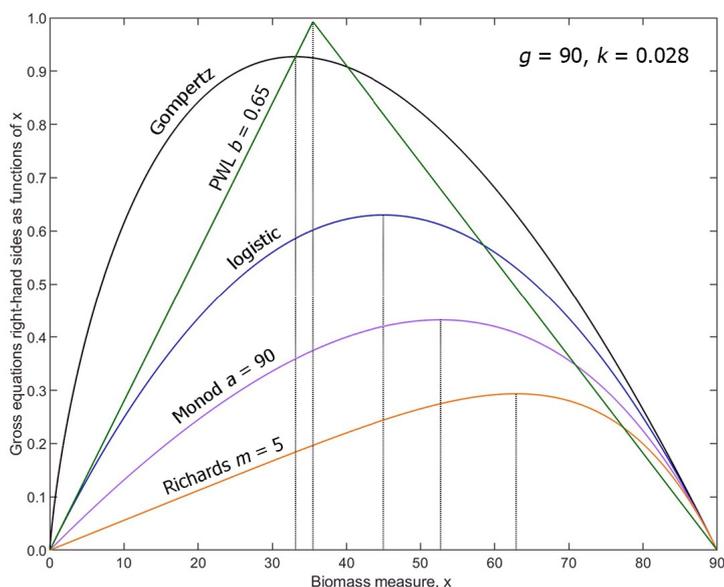
(i)	$\frac{dx}{dt} = kx \left(1 - \frac{x}{g}\right)$	logistic equation
(ii)	$\frac{dx}{dt} = kx \ln \frac{g}{x}$	Gompertz model
(iii)	$\frac{dx}{dt} = \frac{kx (g - x)}{a + (g - x)}$	Monod model
(iv)	$\frac{dx}{dt} = \frac{kx}{m} \left(1 - \frac{x^m}{g^m}\right)$	Richards model
(v)	$\frac{dx}{dt} = k \min(x, b(g - x))$	piecewise-linear (PWL) model (Kolker model)

Здесь всюду x — биомасса (численность, плотность) растущей популяции микроорганизмов, g — максимально достижимая мера биомассы популяции (уровень насыщения, плато, на которое выходит ростовая кривая), k — коэффициент начального роста популяции при малых x и избытке ресурсов (коэффициент «свободного роста»), а параметры a , m , и b характеризуют поведение популяции в условиях нехватки ресурсов. Все параметры в моделях (i)–(v) — постоянные. Если принять их переменными, то все эти модели утрачивают своё единственное достоинство, простоту, и разом делаются ненужными... По правде сказать, они и вообще-то мало нужны, — такие игрушки из XIX века, из эпохи, когда остроумцы от науки додумались сказать, что бог мыслит дифференциальными уравнениями...

В 1985 и 1986 годах, в иерусалимском университете, вычислять параметры кривых (методом наименьших квадратов) мне приходилось на примитивном настольном компьютере первого поколения. Ещё хуже то, что у меня — да и ни у кого — не было возможности строить графики так, как это нужно в подобных случаях: не вставая из-за рабочего стола, поправляя их вволю по мере накопления понимания и опыта. Графики, конечно, можно было строить даже там и тогда, но это превращалось в настоящее мучение. Нужно было идти в другое здание и заказывать время на «большом компьютере», времени заказанного обычно не хватало, графики «большой компьютер» строил долго, и получались они уж очень неказистые. Впрочем, и самую эту возможность — строить такие графики — открыл я позже, в 1987 году, когда уже работал с Сергеем Брауном, — по его подсказке. Бенц Гинцбург обходился без графиков... но именно он рассказал мне про новую неслыханную возможность: передавать графики по телефону... то есть объяснил про только что появившийся факс, и я не хотел Бенцу верить, пока сам не прикоснулся к этому чуду, — пока Бенц не отвёл меня в специальную комнату, единственную в университете, где эта волшебная машина была установлена. Первое письмо факсом, с текстом и графиком, я отправил в Германию, моему давнему старшему коллеге Лёне Фукшанскому, с которым подавал тогда на общий грант (нами не полученный).

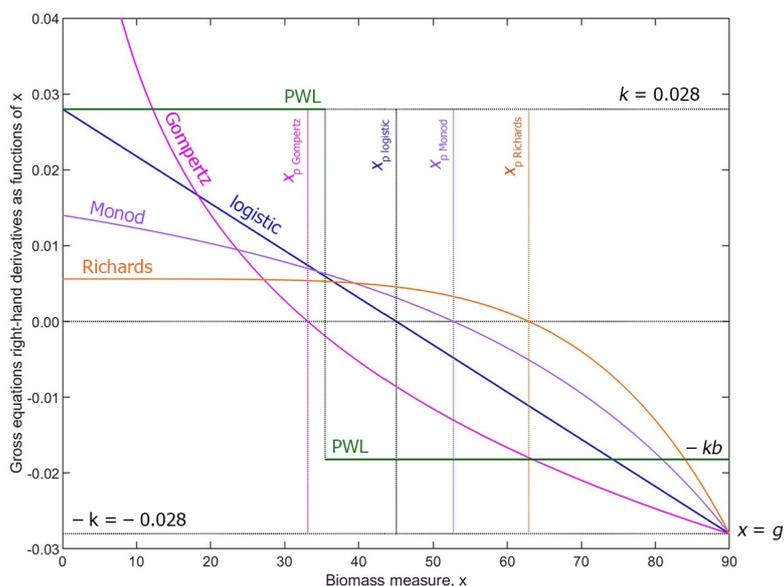
Сегодня невероятная по своим возможностям программа MATLAB прямоком помещает меня в райские сады: она позволяет строить любые графики. Начну с

графика правых частей уравнений (i)–(v), который мне даже в голову не приходило построить в 1986 году, потому что этот график не столь уж важен, хоть и не бесполезен.



Пунктирные линии, понятно, тянутся к максимумам правых частей, соответствующим точкам перегиба ростовых кривых... Не самая важная картинка, что и говорить, почти ненужная, а всё-таки неплохо иллюстрирующая разом все пять моделей ещё до их применения и даже до решения уравнений.

Построю заодно и графики вторых производных, производных от правых частей (i)–(v) как функций x для тех же значений параметров:



Понятно, что там, где эти кривые пересекают ось абсцисс (где вторые производные обращаются в нуль), там первые производные имеют максимумы, а ростовые кривые — точки перегиба. Понятно и то, что вторая производная кусочно-линейной модели PWL не пересекает оси абсцисс; в точке разрыва она не определена, однако по обе стороны от этой точки у второй производной разный знак, так что эта точка (точка разрыва, точка переключения) всё-таки подпадает под определение точки перегиба и уж во всяком случае во всём совершенно аналогична точкам перегиба других кривых...

Впрочем, даже если это рассуждение не вполне корректно, то всё осталось на своих местах, и модель PWL, как говаривал Гамлет, «не полиняла ни пёрышком».

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Λογιστική, любовь моя! Любил ли кто тебя, как я? С тебя — начинаю в 1968 году мою дипломную работу. Как я упивался твоей внутренней логикой, твоей симметрией и простотой, твоей неопровержимостью! Ну, и в Иерусалиме, в 1985 году, я, пасынок науки, тебя вспомнил, едва только Бенц Гинцбург показал мне дуналиеллу и научил измерять оптическую плотность культуры в единицах Клетта...

Логистическое уравнение впервые исследует Pierre-François Verhulst в 1830-е годы, затем его переоткрывает в первой четверти XX века А. G. McKendrick, за ним — Raymond Pearl, а в 1925 году Alfred J. Lotka провозглашает его *законом популяционного роста*... Законом! На дворе дотлевала эпоха всеобщих и всеохватных теорий с её дарвинизмом, марксизмом и геккелизмом («онтогенез повторяет филогенез»). Немецкая выдумка XIX века, восходящая, впрочем, к Ньютону и Декарту...

Вот логистическое уравнение в моей записи 1986 года, повторяющей запись Ферхюльста:

$$\frac{dx}{dt} = kx \left(1 - \frac{x}{g} \right) \quad (L1)$$

где, понятно, x — численность особей или суммарная биомасса (с начальным значением x_0), а g — предельное значение x , уровень насыщения, плато, а k — мальтузианский коэффициент репродукции при избытке ресурсов (при малых x , когда второй степенью x^2 можно пренебречь).

Логистическое уравнение приложимо и к культуре в склянке без протока, и к хемостату. В самом деле, добавив в правой части (L1) скорость вымывания $-Dx$, получим ещё один линейный член, который можно объединить с kx : $k'x = (k + D)x$, так что останется лишь поменять в (L1) k на k' .

Уравнение (L1) шутя решается разделением переменных:

$$x = \frac{g}{1 + \left(\frac{g}{x_0} - 1 \right) e^{-kt}} \quad (L2)$$

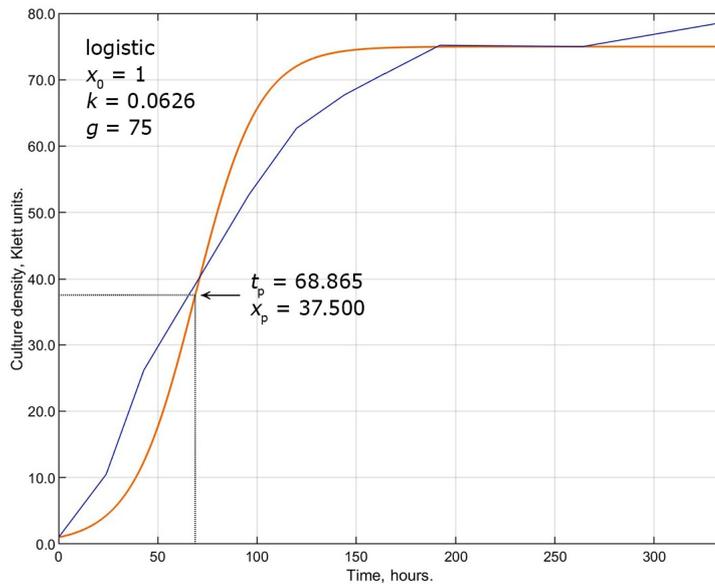
Точка перегиба этой классической кривой такая:

$$x_p = \frac{g}{2}, \quad t_p = \frac{1}{k} \ln \frac{x_p}{x_0} \frac{g - x_0}{g - x_p} = \frac{1}{k} \ln \frac{g - x_0}{x_0} \quad (L3)$$

В 1968 году, когда я писал мою дипломную работу *Управление численностью биологических популяций*, я буквально изнемогал от потребности построить (увидеть на бумаге, на экране её нельзя было) *живой* график логистической кривой, — и, конечно, не мог ни построить, ни увидеть; не мог и не хотел заниматься этим сам, чертёжник я был никакой, ресфедеры и ватман презирал... забытые, между прочим, слова... — а вместе с тем только самостоятельная работа, нет, не работа, а игра с этой кривой могла утолить мою жажду... Я больше скажу: я изнемогал от этой жажды *бессознательно*; я чувствовал, что мне чего-то недостаёт, а назвать эту недостачу не умел.

С тех пор мир переменялся непредставимо, невообразимо, и вот моя юношеская мечта осуществляется теперь по мановению волшебной палочки... по «манию руки», как весьма нелепо говорит Пушкин, и не в одном только месте, — без ресфедеров и

ватмана, прямо на экране. Вот моя возлюбленная кривая во всей её первозданной электронной красе, с аккуратненькой точкой перегиба, равной половине g :



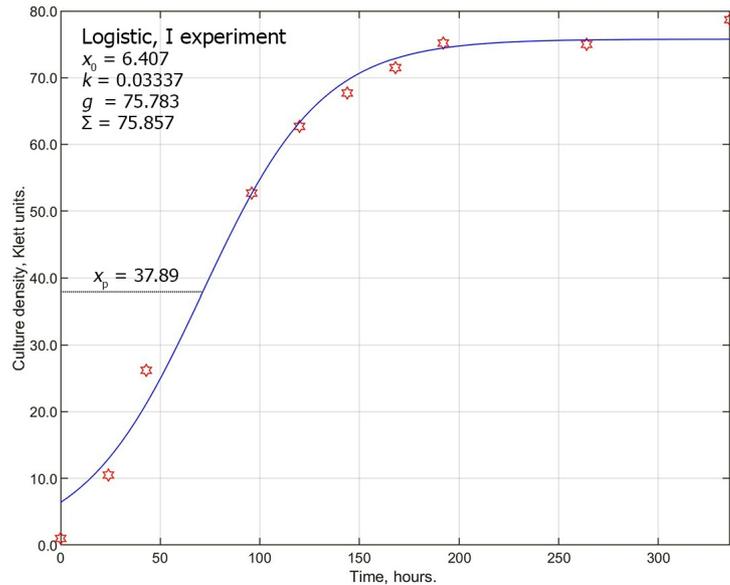
Голубая ломаная линия построена по десяти точкам моего первого опыта 1986 года с дуналиеллой. Логистическую кривую (оранжевую) строю (понятно, с помощью MATLAB'a) 20 ноября 2019 года... причём пытаюсь приблизить её к экспериментальной кривой, варьируя параметры k и g , а про параметр x_0 почему-то забываю; естественно, несовпадение получается чудовищное...

Принимаюсь за дело всерьёз. С помощью метода наименьших квадратов (функция `lsqcurvefit` в MATLAB) варьирую уже все три параметра x_0 , k и g , — приспособливаю эту кривую к результатам моего первого опыта 1986 года с дуналиеллой. Получаю наименьшую сумму квадратов $\Sigma = 75.857467$, искомые параметры $x_0 = 6.406556$, $k = 0.033372$, $g = 75.782895$, а заодно и координаты точки перегиба $(t_p, x_p) = (71.384126, 37.891447)$.

С некоторой оторопью отмечаю, что функция `lsqcurvefit` чувствительна к начальным условиям (все три параметра полагается сперва приблизительно задать для начала вычислений с помощью `lsqcurvefit`). Впрочем, расхождения появляются в четвёртом знаке после десятичной точки, так что об этом позволительно забыть.

Главное вот что: в Иерусалиме в 1986 году, на примитивном компьютере и без `lsqcurvefit` (программу я тогда сам писал на бэйсике) результат я получил почти неотличимый от теперешнего (осень 2019 года): $\Sigma = 75.858$, $x_0 = 6.40$, $k = 0.03339$, $g = 75.78$. То есть — я тогда работал честно, старательно... идиотически старательно...

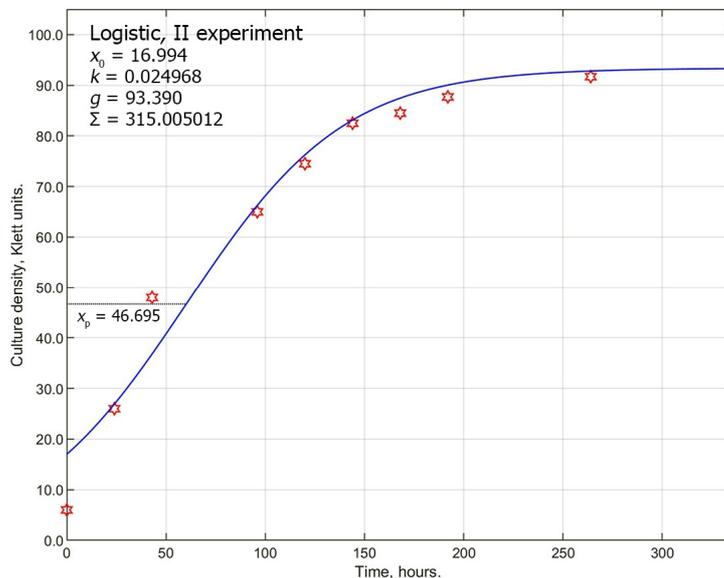
Чего я не мог сделать в Иерусалиме в 1986 году, так это график построить. Вот как он выглядит сегодня:



Естественно, сумма $\Sigma = 75.857$ вышла неважная: слишком большая. Не очень логистическая кривая подходит для описания моего первого опыта с дуналиеллой.

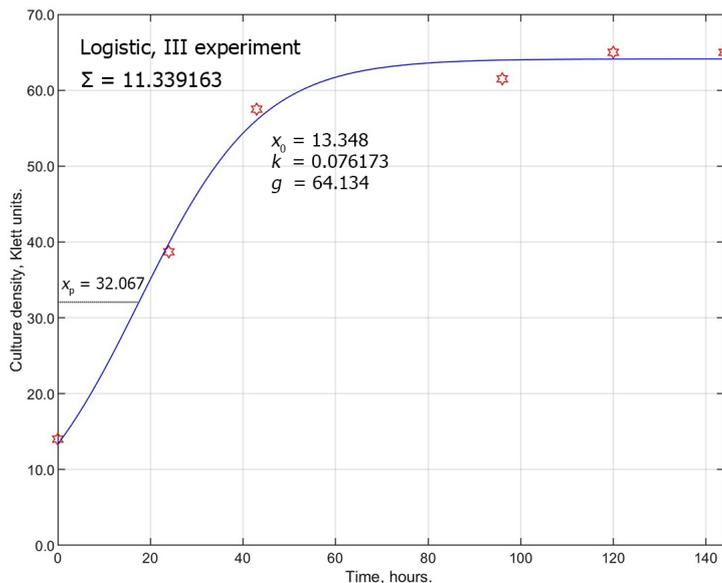
Но для моего второго опыта с дуналиеллой эта кривая ещё менее применима. Метод наименьших квадратов даёт $\Sigma = 315.005012$, параметры $x_0 = 16.993895$, $k = 0.024968$, $g = 93.389847$ и точку перегиба $x_p = 46.694924$, $t_p = 60.200584$. Опять вижу хорошее совпадение с параметрами, полученными в 1986 году: $\Sigma = 315.01$, $x_0 = 16.97$, $k = 0.02500$, $g = 93.37$. И точка перегиба аккуратенькая: $x_p = 46.68$, $t_p = 60.18$. Старательный был я малый, нечего сказать...

Вот график:



Вот, наконец, и мой третий опыт 1986 года с дуналиеллой. Сейчас получаю: $\Sigma = 11.339163$, $x_0 = 13.348181$, $k = 0.076173$, $g = 64.134079$, $x_p = 32.067040$, $t_p = 17.542086$. В третьем опыте — заметное расхождение с результатами 1986 года; там было: $\Sigma = 13.824$, $x_0 = 13.18$, $k = 0.07581$, $g = 65.01$, $x_p = 32.50$, $t_p = 18.06$. Видно, устал я тогда, что ли... Или надоело?

Строю график:



На этом прощаюсь с логистическим уравнением, моей давней любовью... Как там в пионерской песне поётся? Мы у костра её пели...

Уравненье-загляденье... денье... денье...
 Поооо-росячий идеал... ал... ал...
 Тот не знает наслажденья... дняя... дняя...
 Кто тебя не обглодал... dull... dull...

УРАВНЕНИЕ ГОМПЕРЦА

Бенджамин Гомперц (1779-1865), вот новость, был лондонским евреем с германскими корнями, самоучкой, потому что в университеты евреев не пускали, но в итоге — членом Королевского общества, то есть академиком, — признание, выше которого — не бывает. Своё уравнение он вывел для дел практических, коммерческих: страховым компаниям требовалось надёжное предсказание смертности клиентов. Замечательно, что никакого дифференциального уравнения он не писал, это за него другие сделали; он сразу решение предложил.

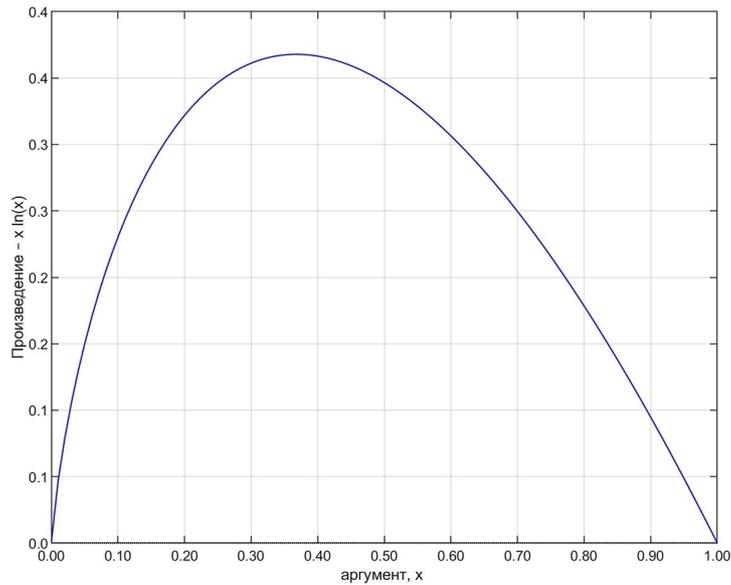
Вот это дифференциальное уравнение в моей записи 1986 года:

$$\frac{dx}{dt} = kx \ln \frac{g}{x} \tag{G1}$$

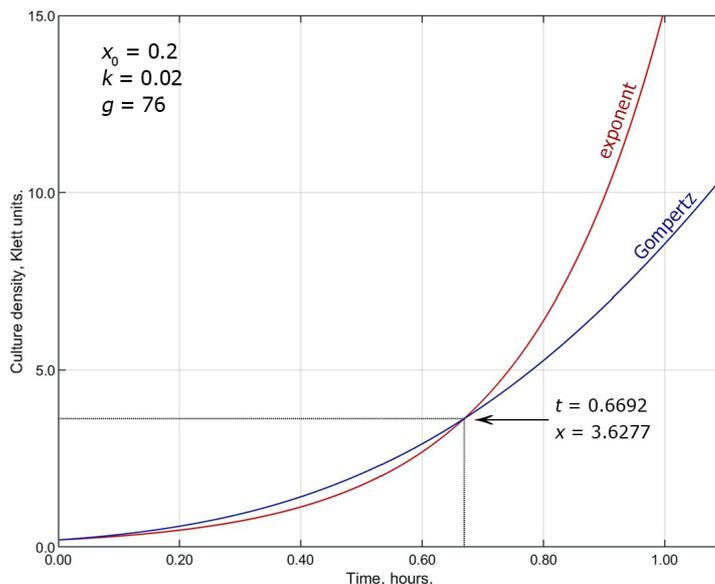
В такой записи его и до меня использовали. Никакого биологического смысла с такой записью связать не удастся; это просто удобный инструмент, не более того. В другой записи

$$\frac{dx}{dt} = kx \ln(g) - kx \ln(x) \tag{G1'}$$

тотчас нужно отдать себе отчёт, что второй член в (G1') отнюдь не обращается в отрицательную бесконечность при $x = 0$, а равен нулю — в силу следствия из *второго замечательного предела*. Взятый как он есть, со знаком минус, этот второй член в (G1') неотрицателен на отрезке $x \in [0, 1]$. Вот как он ведёт себя при $k = 1$:



А это значит, что при $x < 1$ (точнее, при $x \in (0, 1)$, ведь точку $x_0 = 0$ нужно из рассмотрения исключить: из ничего не вырастет ничего) прирост биомассы идёт со скоростью, превышающей скорость мальтузианского экспоненциального роста, — что вряд ли можно признать приемлемым поведением какой бы то ни было биологической популяции. Сравним графически две эти ростовые кривые для $x_0 = 0.2$, $k = 0.02$, $g = 76$:



где точку пересечения кривых я *торжествующе* вычисляю сейчас с помощью чудес MATLAB'a:

```
syms t
t1 = vpasolve (g.*(x0./g).^exp(-t)==x0.*exp(log(g).*t), t, [0.01 Inf]);
x1 = x0.*exp (log(g).*t1);
```

Итак, уравнение Гомперца вряд ли годится для описания опытов, в которых $x_0 < 1$; но, разумеется, изменением единиц измерения биомассы всегда можно добиться того, чтобы было $x_0 \geq 1$, только нужно помнить об этом. Стоит и то отметить, что нормальное биологически-осмысленное k не к единице близко, а измеряется сотыми долями единицы, что делает на практике совершенно незаметным (крохотным) *преобладание* кривой Гомперца над мальтузианской экспонентой вблизи начала координат.

Ничего из этой пустяшной философии (справедливой для любых неотрицательных k) я не отмечаю [в моей статье 1987 года](#); я тогда просто не задумался над этим ни на секунду, потому что в моих-то опытах как раз и было всюду $x_0 \geq 1$... И, конечно, тогда я не мог строить этих упоительных графиков...

Но это — полбеда. Хуже другое. В 1986 году я каким-то образом не заметил, что для хемостата уравнение (G1) не годится и, следовательно, к описанию моих опытов не подходит. Чтобы получить хемостат, необходимо учесть скорость вымывания организмов из склянки, то есть написать:

$$\frac{dx}{dt} = k \ln \frac{g}{x} - Dx \quad (G1')$$

При этом, во-первых, уравнение становится трёхпараметрическим, что тут уже прямо-таки недопустимая роскошь для такой детской игрушки, а во-вторых и в-главных, не интегрируется, утрачивает свою простоту, утрачивает явное решение, не позволяет найти ни функцию $x(t)$, ни хотя бы обратную функции $t(x)$... насколько это я вижу сегодня, в декабре 2019 года. Видел ли я это в 1986 году, не знаю... и того не знаю, как мою оплошность проглядели редакторы *The Journal of Mathematical Biology*, напечатавшие статью... Закрываю на всё это глаза. Если не забывать, что опыты мои с дуналиеллой в любом случае были топорные; что на уме у меня было одно: ввести в круг инструментов описания ростовых функций мою функцию PWL, то можно вот именно что закрыть на это глаза и продолжать начатое.

Решение (G1) легко находится разделением переменных.

$$x = g \left(\frac{x_0}{g} \right) e^{-kt} \quad (G2)$$

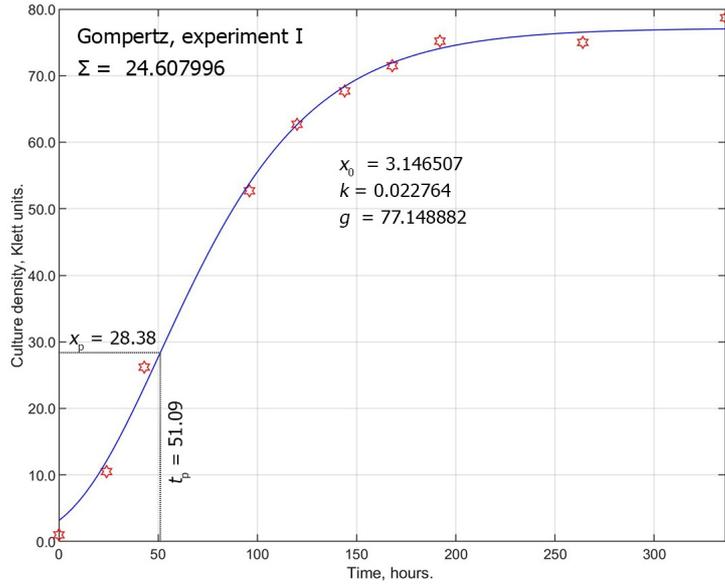
Точка перегиба кривой такая:

$$x_p = \frac{g}{e}, \quad t_p = \frac{1}{k} \ln \frac{\ln \frac{x_0}{g}}{\ln \frac{x_p}{g}} = \frac{1}{k} \ln \left(\ln \frac{g}{x_0} \right) \quad (G3)$$

то есть она *ниже* (по оси ординат) точки перегиба логистической кривой: $g/e < g/2$. Как и у всех приличных ростовых кривых, ордината точки перегиба не зависит ни от x_0 , ни от k .

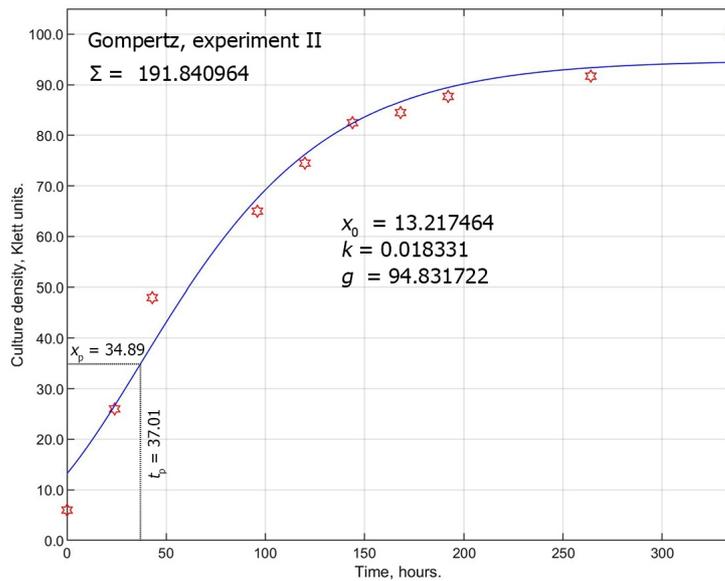
С помощью метода наименьших квадратов (функция `lsqcurvefit` в MATLAB) приспособливаю эту кривую к результатам моего первого опыта 1986 года с дуналиеллой (варьирую параметры x_0 , k и g). Наименьшая сумма квадратов получается лучше логистической: всего 24.607996: ура! И опять с тайной гордостью говорю: в 1986 году, в Иерусалиме, в эпоху компьютерных динозавров, я считал старательно, получил $\Sigma = 24.609$. Расхождение — в одну тысячную. Параметры x_0 , k и g , а также координаты точки перегиба (x_p , t_p) тоже хорошо совпадают.

Вот график:



Второй мой опыт с дуналиеллой плохо описывается кривой Гомперца. Сумма получилась большая: $\Sigma = 191.840964\dots$ но зато опять совпадающая с полученной в 1986 году: $\Sigma = 191.84$. И параметры (x_0, k, g, x_p, t_p) получены очень похожие на таковые 1986 года.

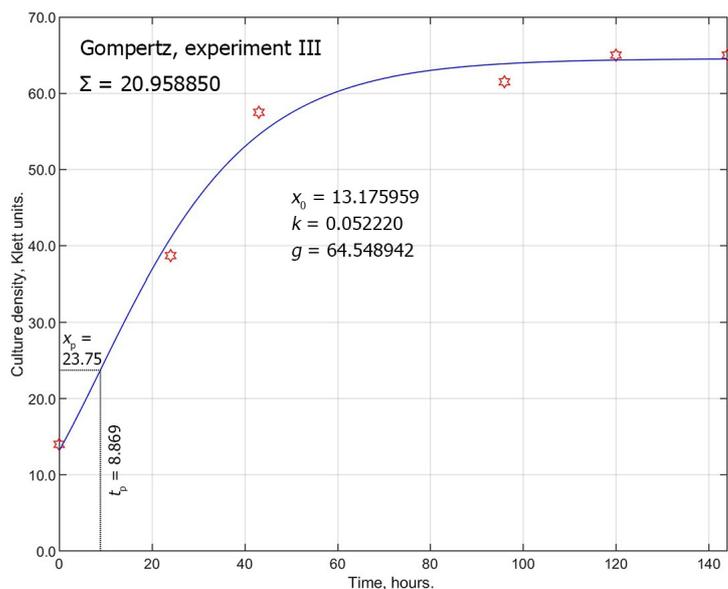
Вот график второго опыта:



По правде говоря, и все прочие модели (i), (iii)-(v) описывают второй опыт плохо, но моя модель (v) — не худшая: вторая по сегодняшним подсчётам... а тогда, в незапамятном 1986 году, она даже разделила первое и второе места с моделью Ричардса (iv). Но это — дальше.

Применительно к третьему моему опыту с дуналиеллой получаю в 2019 году для уравнения Гомперца сумму: $\Sigma = 20.958850$. И эта сумма, и все прочие параметры идеально совпадают с находками 1986 года.

Вот график третьего опыта:



Вообще же уравнение Гомперца описывает мой третий опыт с дуналиеллой хуже других четырех уравнений, как это будет видно из сводной таблицы...

В одном-единственном отношении мои три опыта оказались очень удачными: кривые получились непохожие друг на друга, и уравнения для их описания соперничают друг с другом.

ВОКРУГ «УРАВНЕНИЯ МОНО»

Эту главу, про Моно (Monod), я начал писать первой в моём романе, оттого-то она самая подробная и самая скучная... хоть и не для меня скучная.

Беру «уравнение Моно», как я его записал в 1985 году:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{kx(g-x)}{a+(g-x)} \quad (M1)$$

Откуда взялась эта запись? Сам Моно дифференциальных уравнений, скорее всего, никогда не писал. Я [в статье 1987 года](#) даю на него учёную ссылку, а что там, в статье, на которую ссылаюсь, сейчас не помню и проверять не хочу. Допускаю, что уравнение в записи (M1) — плод моей фантазии. Но от этого оно не перестаёт работать: даёт-таки пресловутую S-образную (сигмоидальную) кривую с насыщением, похожую при разумных k на логистическую. В этой записи, понятно, константа k — не та, что в логистическом уравнении, а так называемая константа полунасыщения $K > 0$ (впрочем, в моей записи (M1) она, пожалуй, этот смысл утратила); g , как и всюду, — уровень насыщения (плато); а третья константа $a = K \cdot Y$, где $Y > 0$ — квазихимическая постоянная из закона сохранения вещества $x + Ys = g$; понятно и то, что x — вес или объём биомассы микроорганизмов (измеренный через оптическую плотность культуры), а s — концентрация субстрата (закон сохранения пересчитывает субстрат s в биомассу x). При таких допущениях позволительно написать:

$$\frac{dx}{dt} = \mu(s)x = \frac{Ks}{K+s}x = \frac{K \frac{1}{Y}(g-x)}{K + \frac{1}{Y}(g-x)}x = \frac{K(g-x)}{KY + (g-x)}x \quad (M2)$$

где и остаётся заменить K на k и KY на a , чтобы получить (M1).

Иными словами, это описание процесса ... в закрытом объёме, без вымывания. Это не хемостат! В хемостате было бы другое:

$$\frac{dx}{dt} = \mu(s)x - Dx = \frac{(K - D)\left(g - \frac{DKY}{K - D}\right) - x}{KY + (g - x)}x = \frac{K_1(K_2 - x)}{K_3 + (g - x)}x, \quad (M3)$$

где D — скорость вымывания; то есть уравнение уже о четырёх константах, а для такой простой модели и трёх-то многовато...

Мне в 1985-1986 годах было не до хемостата: надо мною висело *publish or perish*; кроме того, стыдно было совсем бездельничать на выделенную мне министерством абсорбции стипендию, и я выбрал (или придумал) что полегче. Вывод формулы (M2) из формулы (M1) лучше выбросить из головы. Лучше брать уравнение (M1) как сносный и работающий математический объект, где ясный и несомненный смысл (и биологический смысл, и математический) имеет только один параметр: g , уровень плато, предельная плотность биомассы в склянке. Я *добрал* это уравнение четвёртым до четырёх. Мне хотелось хотя бы четыре уравнения сравнить с моим новым, с *PWL*, предложенным мною [в статье 1987 года](#), построенным на основе принципа лимитирующих факторов. Логистическое уравнение, милое мне с 1968 года, когда я его в мою дипломную работу включил, шло первым; уравнение Гомперца вторым (оно — частный случай Ричардса; что оно тоже не хемостатное, я в 1986 году тоже не заметил), уравнение Ричардса четвёртым; моё *PWL* — пятым; а на третьем месте оказалось «уравнение Моно» в записи (M1). Вот его не совсем благородное происхождение.

Ты знаешь, милая: в тогдашних (1985 и 1986 годов) условиях мне было вообще не до научной работы: все силы уходили на вживание в новый мир. Какая наука?! Я к моменту высадки в Израиле в июне 1984 года ею не занимался больше десяти лет, в поганом Ленинграде сперва программировал, потом и вовсе кочегарил. Поэтому я в 1986 году простенькое уравнение (M1) толком не исследовал, нашёл только, помимо общего решения через обратную функцию, точку перегиба кривой. Все остальные наблюдения — теперешние, осени и зимы 2019 года.

Разделяем в (M1) переменные и интегрируем; получаем:

$$t = \frac{a + g}{kg} \ln \frac{x}{x_0} + \frac{a}{kg} \ln \frac{g - x_0}{g - x}, \quad (M4)$$

$$\text{или } t = \frac{1}{k g} \ln \left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{a+g} \left(\frac{g - x_0}{g - x} \right)^a \right), \quad (M4')$$

$$\text{или } t = \ln \left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{a+g}{kg}} \left(\frac{g - x_0}{g - x} \right)^{\frac{a}{kg}} \right) \quad (M4'')$$

Запись (M4) — самая удобная запись зависимости $t(x)$ для общего случая. Потому-то я именно её использовал в статье 1987 года... — а сейчас, в ноябре 2019 года, увидев решение записанным в статье в такой форме, я поначалу изумился моей тогдашней неловкости и соорудил *корректную* запись (M4''): внёс множители под знаки логарифмов в качестве показателей степени, а потом два логарифма объединил в один. При этом — выражение потеряло наглядность.

Именно из (M4) хорошо видны предельные и частные случаи. При $a = 0$ и при $g \rightarrow \infty$ кривая Моно вырождается в мальтузианскую экспоненту: $x = x_0 \exp(kt)$. При $a = g$ (этот любопытный частный случай не был мною рассмотрен в 1985-1986 годах) уравнение (M4) сводится к квадратному уравнению относительно x и легко решается:

$$x = x_0 \frac{\sqrt{x_0^2 + 4g(g - x_0)e^{-kt}} - x_0}{2(g - x_0)e^{-kt}} \quad (M5)$$

Через формулу Кардано можно получить решение ещё для двух случаев, тоже не рассмотренных мною в Иерусалиме: для $a = \frac{1}{2}g$ и $a = 2g$. В первом случае (M4) даёт кубическое уравнение в канонической форме (depressed cubic), что сразу упрощает дело:

$$x^3 + zx - zg = 0 \quad \text{где} \quad z = \frac{x_0^3}{g - x_0} e^{2kt} \quad (M6)$$

Поскольку z и g существенно положительны, дискриминант уравнения (M4'')

$$\Delta = -4z^3 - 27(-zg)^2 = -4z^3 - 27z^2g^2 \quad (M7)$$

отрицателен, следовательно, существует два сопряженных комплексных корня и один вещественный корень, который нам и нужен. Вот он:

$$x = \sqrt[3]{\frac{g}{2} \frac{x_0^3}{g - x} e^{2kt} + \sqrt{\left(\frac{1}{3} \frac{x_0^3}{g - x} e^{2kt}\right)^3 + \left(\frac{g}{2} \frac{x_0^3}{g - x} e^{2kt}\right)^2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3} \frac{x_0^3}{g - x} e^{2kt}\right)^3 + \left(\frac{g}{2} \frac{x_0^3}{g - x} e^{2kt}\right)^2} - \frac{g}{2} \frac{x_0^3}{g - x} e^{2kt}} \quad (M8)$$

Весёленькое выраженище, нечего сказать... Особенно весело такую формулу вставлять в вычислительную программу. Количество скобок таково, что мудрено не запутаться... Но я вставил эту конструкцию как она есть — после двадцати или пятидесяти исправлений:

$$x = \left((x_0 \cdot \exp(2 \cdot k \cdot t) / (g - x_0)) \cdot g / 2 + \sqrt{\left((x_0 \cdot \exp(2 \cdot k \cdot t) / (g - x_0)) / 3 \right)^3 + (g \cdot (x_0 \cdot \exp(2 \cdot k \cdot t) / (g - x_0)) / 2)^2} \right)^{1/3} + \left(-\left(\text{abs}\left((x_0 \cdot \exp(2 \cdot k \cdot t) / (g - x_0)) \cdot g / 2 - \sqrt{\left((x_0 \cdot \exp(2 \cdot k \cdot t) / (g - x_0)) / 3 \right)^3 + (g \cdot (x_0 \cdot \exp(2 \cdot k \cdot t) / (g - x_0)) / 2)^2} \right) \right)^{1/3} \right);$$

Зачем я это делал? В программе ведь можно было вычислять этого диплодока поэтапно, кусками: сначала вычислить z , потом

$$Q = \left(\frac{z}{3}\right)^3 + \left(-\frac{gz}{2}\right)^2 \quad (M9)$$

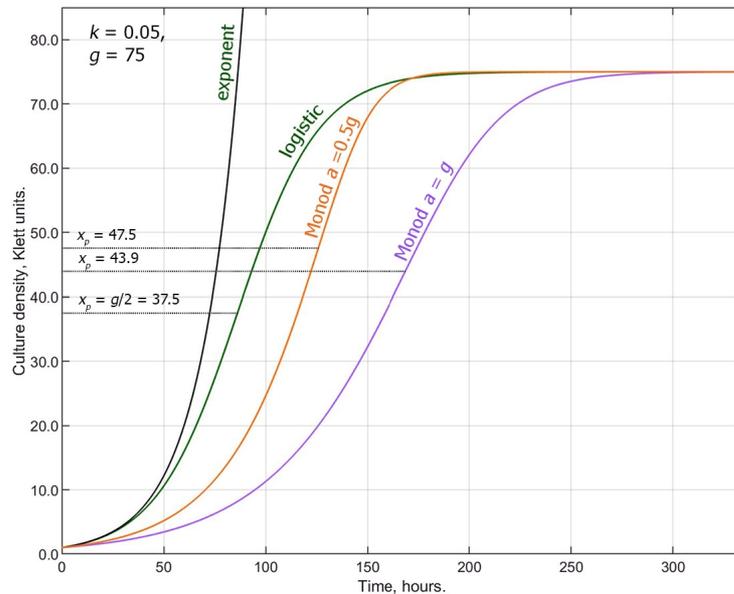
потом

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{zg}{2} + \sqrt{Q}}, \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{zg}{2} - \sqrt{Q}} \quad (M10)$$

потом заметить, что подкоренное выражение в β отрицательно, следовательно, и β отрицательно:

$$Q > \frac{zg}{2} \Rightarrow \beta = -\sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{zg}{2}} \quad (M11)$$

наконец, сложить α и β и получить искомый вещественный корень: $x = \alpha + \beta$. При этом вероятность путаницы резко падает. Но дело в том, что я готовил формулу (M8) для функции `lsqcurvefit` метода наименьших квадратов MATLAB'a, а применительно к `lsqcurvefit` я не научился пока определять формулу поэтапно, как я только что показал; такая возможность в матлабе есть, я это знаю, видел примеры, да разобрать их у меня руки не дошли... Это пока откладываю. Пока — приведу график, сравнивающий три частных случая кривой Моно ($a = 0$, $a = g/2$, $a = g$) с логистической кривой (горизонтали от оси ординат тянутся к точкам перегиба кривых):



Что же касается случая $a = 2g$, то я решаю им не заниматься. Можно себе представить, какие выйдут формулы при решении этого кубического уравнения общего вида (не канонического, как (M6)) и сколько раз я ошибусь по невнимательности при программировании. Работа неблагодарная и ненужная. Потом будет видно, что без неё преспокойно можно обойтись и получить всё, что нужно, вообще для любого a .

Итак, в общем случае, при произвольных k , g и a , имеем (M4), — трансцендентное уравнение относительно x . Для построения графиков получать функцию $x(t)$ не обязательно, достаточно обратной функции $t(x)$. Но обратная функция не годится для метода наименьших квадратов.

Находим точку перегиба кривой Моно. Для получения второй производной от $x(t)$ дифференцируем и приравняем к нулю правую часть (M1); дифференцируем, к слову сказать, либо по t , либо прямо по x (можно забыть на минуту, что x есть функция t , потому что всё равно дальше будет сокращение на производную \dot{x}). Коэффициент k тоже пропадает при сокращении: ордината точки перегиба x_p от k не зависит. Приравниваю к нулю числитель второй производной (знаменатель всегда положителен при $x \leq g$); выходит квадратное уравнение с неуклюжим на первый взгляд решением

$$(a + g) \pm \sqrt{(a + g)^2 - g(a + g)}$$

(в нём, первым делом, меняем \pm на минус, исходя из того же требования $x \leq g$), — однако это решение волшебным образом упрощается с применением сопряженных чисел (*conjugate*) и даёт ординату (меру биомассы) точки перегиба кривой в такой простой форме:

$$x_p = \frac{g}{1 + \sqrt{\frac{a}{a+g}}} \quad (M12)$$

Из (M4) следует аргумент (абсцисса, в опыте с дуналиеллой, — время) точки перегиба:

$$t_p = \frac{a+g}{kg} \ln \frac{x_p}{x_0} + \frac{a}{kg} \ln \frac{g-x_0}{g-x_p} \quad (M13)$$

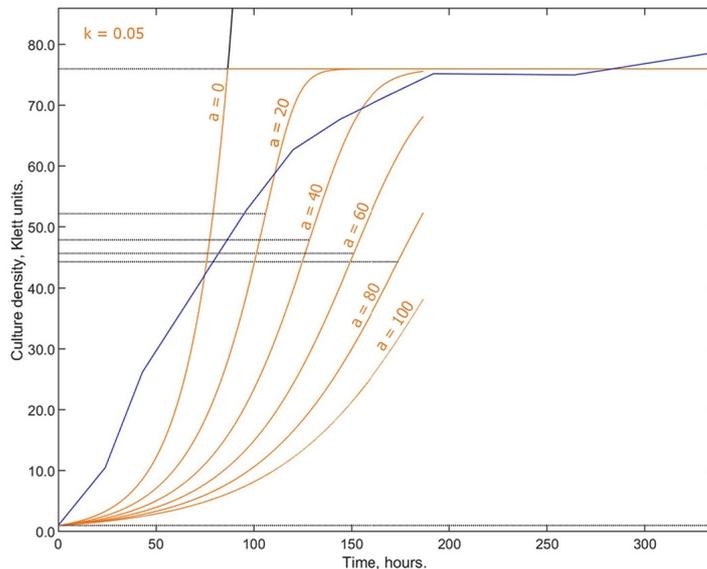
где, понятно, x_p можно выразить через (M12), но наглядности это не прибавит. Из (M13) видно, что при $a \rightarrow \infty$ $x_p \rightarrow g/2$, то есть в пределе кривая Моно ведёт себя в точности как кривая логистического уравнения. Это в 1986 году я упустил: не догадался, что и кривая Моно сходится к логистической при $a \rightarrow \infty$.

При $a = g$ получаем

$$x_p = \frac{g}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = g(2 - \sqrt{2}) = 0.5858 g \quad (M14)$$

то есть точка перегиба лежит выше (по оси ординат) таковой логистического уравнения.

Замечу мимоходом, что я сперва (сейчас, в ноябре 2019) внёс в программу функцию $t(x)$ в записи (M4'), и дела пошли плохо. Оказалось, что при высоких показателях степени (при больших g и a) числа под знаками логарифма разрастаются так, что MATLAB их не берёт. Даже при разумных k (не больше 0.1) график не достраивается уже при $a > 20$. Вот пример:



На этом графике голубая ломаная линия построена по точкам первого моего опыта с дуналиеллой в хемостате, а точечные линии от оси ординат тянутся к точкам перегиба кривых, построенных по неуклюжей формуле (M15); $g=76$.

Что сказано про (M4), то повторяю и про (M13): эта запись самая удобная. Если подставить (M5) в (M13), получаем того самого диплодока: громоздкое выражение, которое трудно читать и вычислять. Выпишу его для утрашения Золушки:

$$t_p = \frac{1}{kg} \ln \left(\left(\frac{g}{x_0 \left(1 + \sqrt{\frac{a}{a+g}}\right)} \right)^{a+g} \cdot \left(\frac{(g-x_0) \left(1 + \sqrt{\frac{a}{a+g}}\right)^a}{g \sqrt{\frac{g}{a+g}}} \right) \right) \quad (M15)$$

Так что лучше держать перед глазами разом два выражения: (M5) и (M6). Да и в программе построения графиков (в MATLABe) оказалось гораздо проще избрать этот путь: сперва вычислить (M5), а затем подставить вычисленное в (M6), потому что при вычислении по формуле (M15) непременно запутаешься со скобками... я — так просто извёлся с ними! Получались премиленькие конструкции типа

$$t = (1./(g.*k)) .* \log \left(\left(\left(\frac{g}{(1+\sqrt{a./(a+g)})} \right) \cdot (x_0) \right)^{a+g} \cdot \left(\frac{(g-x_0) \cdot (1+\sqrt{a./(a+g)})^a}{(g \cdot \sqrt{a./(a+g)})} \right) \right);$$

Как тут не ошибиться? Сколько времени уходило на выискивание недостающей скобки!

Кривые не достраивались даже при том, что я догадался измельчить шаг по оси ординат (по мере приближения к плато g) с помощью экспоненты:

$$\begin{aligned} x &= \text{linspace}(0, 1, 1e+6); \\ x &= \exp(1-x) .* x .* g; \end{aligned}$$

А с помощью формулы (M4) или (M6) даже $a = 60,000,000$ — не предел, кривые преспокойно выходили на плато и дотягивались до 336 часа моего первого иерусалимского эксперимента... правда, при этом я сохранял отношение k/a постоянным и равным 0.00083333, а отношение $a/(kg) = 16$, то есть $kg/a = 0.0625$ ($k = 5$, $a = 6000$; ... $k = 50,000$, $a = 60,000,000$)... Да, не при всех значениях k и a (я всюду держу g равным 75 или 76), но в большинстве случаев формулы (M4) и (M6) прекрасно работают. При $a/(kg) > 11.4$ — всё в порядке, назначай a равным хоть шестидесяти миллионам...

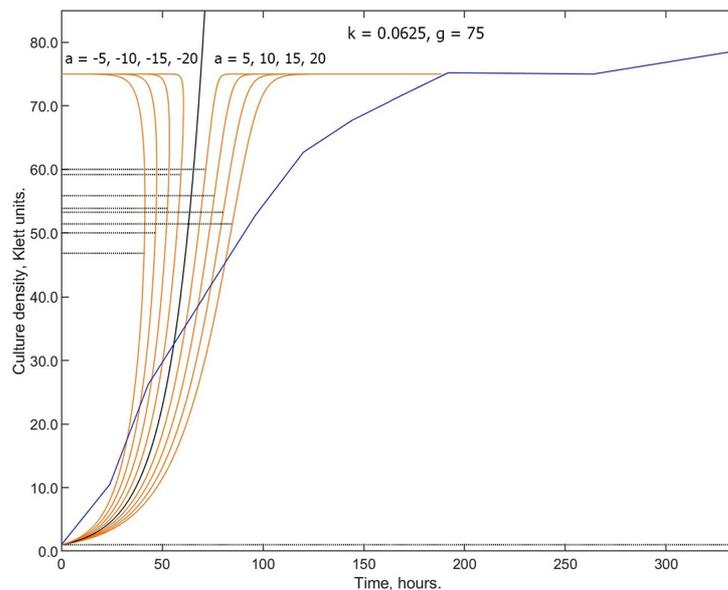
Повторюсь: график уравнения Моно, — как и следовало ожидать, если внимательно посмотреть на (M1) или на (M4)... — да только в 1986 году я не удосужился посмотреть, — при конечном g и условиях: $k/a = \text{constant}$, $a \rightarrow \infty$ (или $k \rightarrow \infty$) сходится к логистическому

$$\frac{dx}{dt} = \frac{kg}{a} x \left(1 - \frac{x}{g}\right) = \frac{g}{Y} x \left(1 - \frac{x}{g}\right) \quad (M16)$$

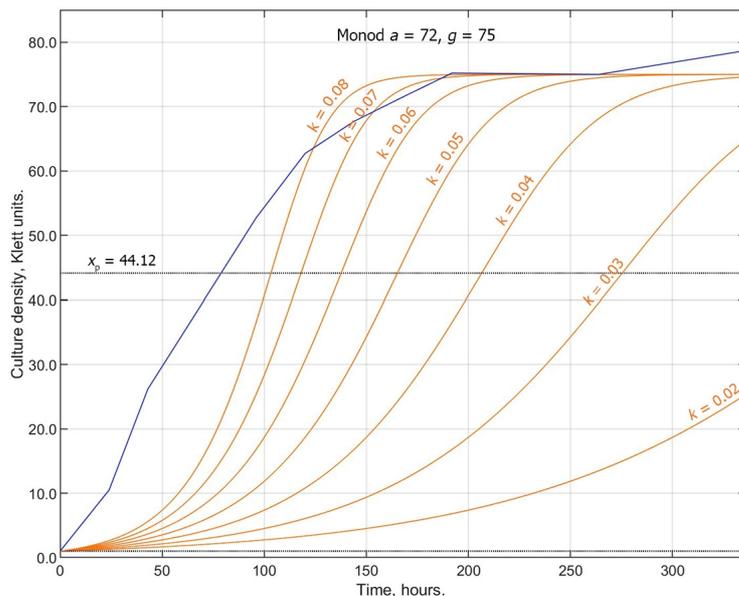
Здесь второе равенство получается, если вспомнить, что $a = KY$, однако лучше об этом не вспоминать: обе эти константы (K и Y) и вообще-то теряют в (M1), как уже сказано, свой исходный биологический смысл, а уж в этом предельном случае — тем более теряют. Пусть $g = 75$ (эту живую реалистическую цифру беру из моего первого опыта с дуналиеллой; см. голубую ломаную линию первого графика), а две другие константы беру нереалистические, анекдотически большие, как раз выражающие предельный случай: $a = 6,000,000$, $k = 5000$. Отношение $kg/a = 0.0625$ — самое естественное и вполне реалистическое для любой естественной популяционной ростовой кривой (ему соответствует $k_0 = 0.0645$ в уравнении сложных процентов; пересчёт по формуле $k_0 = \exp(k) - 1$). Накладываю графически поверх кривой Моно логистическую кривую и вижу, что при $a = 6,000,000$, $k = 5000$ они *идеально* совпадают, так что даже $x_p = g/2 = 37.5000$, то есть прямо логистическое число получилось. Но уже и при $a = 60000$, $k = 50$ ($x_p = g/2 = 37.5117$) на графике отличие и в лупу не разглядеть; даю кривые в MATLAB разным цветом — и вижу, что при накладывании одной на другую

цвет меняется, а толщина кривой остаётся прежней. Только при $a = 6000$, $k = 5$ ($x_p = g/2 = 37.6165$) на графике можно уловить, что кривая Моно чуть заметно сдвинулась вправо от логистической кривой... Но как раз эти цифры и показывают невозможность видеть в k коэффициент *прироста численности популяции* как он выступает в экспоненциальной кривой (кривой Мальтуса) и в логистической кривой (кривой Ферхюльста и Пирла). Понятно, что $k = 5$ — уже предельный случай: ведь при нём — $k_0 = 147.41$, то есть одна особь производит 147 особей в единицу времени! Многовато.

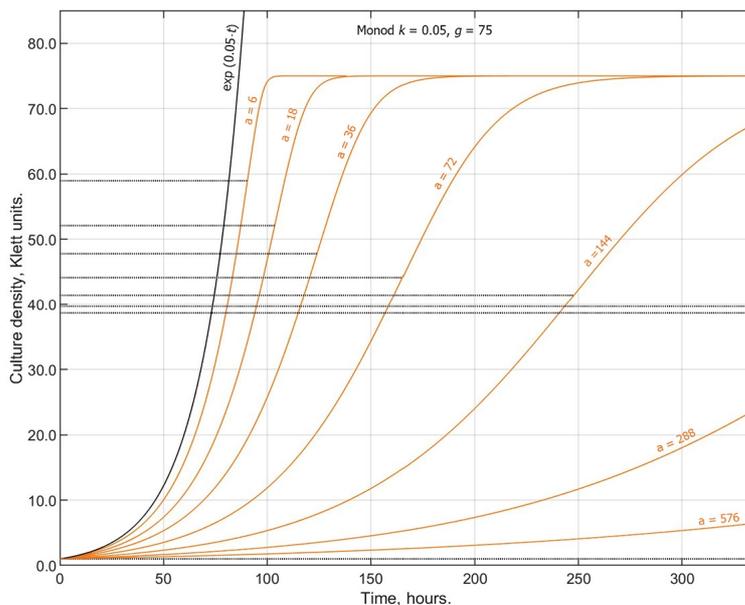
Итак, логистическое уравнение — предельный случай уравнения Моно: ура. Естественно, a всюду больше нуля... это — если хоть какой-то смысл видеть в коэффициентах a и k . При $a = 0$, напомню себе, кривая Моно совпадает с экспоненциальной. Но и при отрицательном a формула (M13) даёт кривую с насыщением, только решение становится двузначным, если видеть в нём обратную функцию $x(t)$, и кривая эта идёт круче вверх, чем экспонента (что не отвечает никакой биологии), а затем поворачивает к оси ординат. Курьёза ради такие кривые можно построить, почему бы и нет? И — для симметрии — строю рядом с ними кривые с теми же значения a , но с обратным знаком, биологически осмысленные. Выходит тюльпан, из которого пестиком вылезает посредине экспонента... или, лучше, — труба старинного граммофона...



Остаётся отметить очевидное: при увеличении k и фиксированном a кривая Моно сдвигается влево, в сторону оси ординат (ведь k стоит в (M1) в числителе), —



где, естественно, точка перегиба сдвигается только по оси абсцисс, а по оси ординат она общая: $x_p = 44.12$. А при увеличении постоянной a (которая в (M1) стоит в знаменателе) и фиксированном k кривая сдвигается вправо — с тем, чтобы при дальнейшем увеличении совсем распластаться вдоль оси абсцисс:



Из всех этих построений можно заключить... нет, допустить, догадаться, что для моего первого эксперимента кривая Моно не слишком хороша; лучшее, что из неё можно извлечь, — логистическая кривая, предельный случай кривой Моно. Будь у меня в 1985-1986 годах возможность строить графики, я бы это увидел без всяких подсчётов. Подгонка теоретической кривой под экспериментальную именно и должна в таких задачах начинаться с подгонки графической; метод наименьших квадратов — последний этап.

Перехожу с некоторым трепетом к этому методу...

Варьируются четыре параметра: x_0 , k , g и a . Для $a = 0.5g$ и $a = g$ зависимость $x(t)$ получена в явной форме: выражения (M5) и (M8). Для них в MATLABе имеется функция `lsqcurvefit`. Прилагаю с помощью `lsqcurvefit` метод наименьших квадратов к

моему первому опыту с дуналиеллой, где плотность биомассы замерялась (в единицах Клетта (Klett units), понятно) десять раз на протяжении 336 часов.

Первый частный случай: $a = 0.5g$ (выражение (M8)). Получаю:

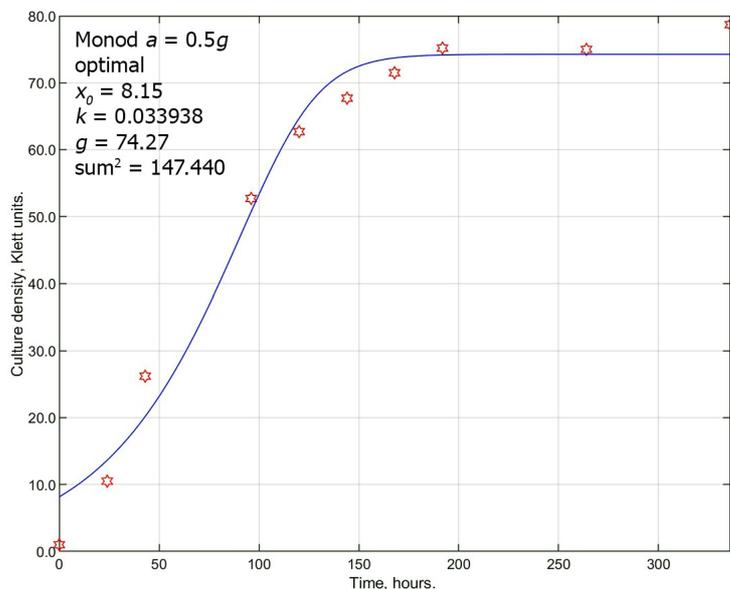
$$x_0 = 8.153546,$$

$$k = 0.033938,$$

$$g = 74.271977,$$

$$\Sigma = 147.439748 \text{ (variation resnorm, минимальная сумма квадратов отклонений).}$$

Вот эта кривая:



Второй частный случай: $a = g$. Получаю:

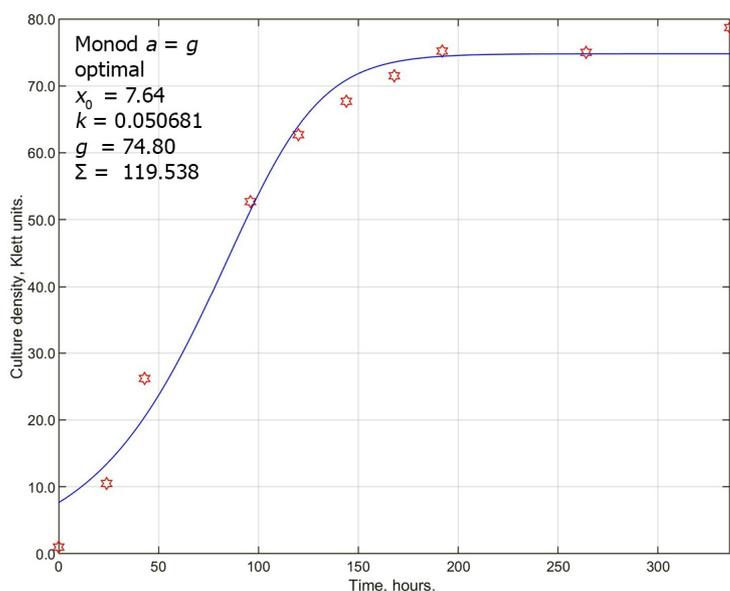
$$x_0 = 7.639607,$$

$$k = 0.050681,$$

$$g = 74.800814,$$

$$\Sigma = 119.538069.$$

График выглядит так:

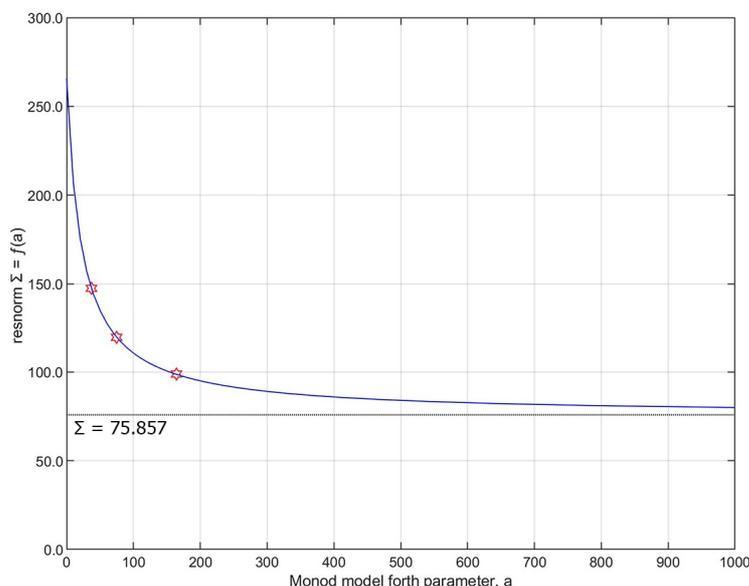


Третью точку зависимости $f(a)$ беру из моей статьи 1987 года: $a = 164.4$, $\Sigma = 98.84$. Как и следовало ожидать, Σ при увеличении a — улучшается (уменьшается). Здесь необходимо отметить вот что: число $a = 164.4$ — *взято мною с потолка*. Я знал в 1986 году, когда *заканчивал* статью, что для моего первого опыта (и для второго) любая оптимальная кривая Моно с конечным a хуже оптимальной логистической кривой, иначе говоря $a = 200$ даст лучшее приближение, чем $a = 164.4$; я догадывался, что кривая Моно сходится к логистической кривой. Об этом свидетельствует фраза в моей статье: Notice that the greater $a = KY$, the closer Monod's model to the logistic... Я знал это, но — то ли не додумал что-то, не увидел этой сходимости из формул, что означало бы совсем уж полную рассеянность, то ли (и это вернее) не хотел договорить до конца всё что знал. Вероятно, о сходимости Моно к логистике я догадался только к концу моих долгих и утомительных вычислений — и не захотел выбросить эти вычисления в корзину, сил-то и времени они отняли много, а признание сходимости эту работу, как мне казалось, зачёркивало; да и сравнить мою кривую PWL мне хотелось с возможно большим числом других кривых, а кривая Моно при этом из сравнения выпадала (сейчас я понимаю, что это не так).

Для логистического уравнения оптимальное значение суммы квадратов применительно к моему первому опыту с дуналиэллай таково $\Sigma = 75.857465$ (по теперешнему подсчёту с `lsqcurvefit`; а в 1986 году топорными методами было получено $\Sigma = 75.858$, расхождение в одну тысячную, совпадение идеальное!). Значит, у нас есть и четвёртая точка... не точка на графике зависимости $f(a)$, а точка опоры в построении этого графика: асимптота $\Sigma = 75.857$, горизонталь, параллельная оси абсцисс. Можно ли сомневаться, что перед нами гипербола вида

$$f(a) = \frac{C}{B + a} + 75.857465 \quad (M17)$$

где остаётся только подобрать постоянные B и C ? Строю эту гиперболу с помощью метода наименьших квадратов (`lsqcurvefit`) по трём точкам ($a = 0.5g = 37.135$, $\Sigma = 147.40$), ($a = g = 74.8$, $\Sigma = 119.538$), ($a = 164.4$, $\Sigma = 98.84$); третья точка взята иерусалимская, 1986 года. Получаю: $B = 22.457$, $C = 4263.332$, а минимальная сумма квадратов отклонений = $0.054502...$ — чуть больше пяти сотых: совпадение головокружительное! ... хотя чего бы тут и ждать? ведь это не эксперимент с живыми организмами, а простое свидетельство, что кривая угадана верно. Вот этот график:



Почему я взял гиперболу, по правде сказать, не знаю. Я взял её как простейшую кривую с горизонтальной асимптотой. Для очистки совести могу и экспоненту попробовать в форме

$$f(a) = e^{-aB+C} + 75.857465 \quad (M18)$$

И что же выходит? $\Sigma = 32.515359$ против $\Sigma = 0.054502$ для гиперболы! Хуже — в 596 раз. Понятно, что экспонента не подходит.

Позволительно спросить: как в 1986 году, в Иерусалиме, я получил эту точку ($a = 164.4$, $\Sigma = 98.84$) на гиперболе $f(a)$? Программу я писал на языке Basic для примитивного настольного компьютера Apple II первого поколения. Естественно, и программа была примитивная. Варьировались, разумеется, все четыре параметра: x_0 , k , g и a , но я почти убеждён (хоть и не помню точно), что в моей тогдашней программе не было всех четырёх циклов, вложенных друг в друга, как матрёшки. На такую программу не стоило тратить силы, потому сложность и вероятность ошибки становились при её написании уж очень велики, а обработке подлежали считанные случаи. Игра не стоила свеч. И я, конечно, делал так: фиксировал наугад три параметра (благо два из них, x_0 и g , варьируют в нешироких пределах) и вёл расчёты по программе с одним циклом, с помощью которой подбирал четвёртый параметр. Потом, с этим четвёртым параметром, равным найденному минимальному значению, я считал по программе, варьирующей третий параметр... потом второй, потом первый, а потом — я возвращался к четвёртому параметру и повторял всё сначала, и так несколько раз — шаг за шагом спускаясь в четырёхмерную яму, пока ни нащупывал приемлемый минимум по всем четырём параметрам. [В статье 1987 года](#) я величаю этот топорный способ методом динамического программирования и описываю в таких словах:

For minimization of (6), the following numerical procedure was used. To initiate the iterative process, a feasible solution p_{10}, \dots, p_{40} (usually, that found as a solution of the classical approach (7)) is to be chosen, $Q_0(p_{10}, \dots, p_{40})$ computed and steps h_i , each with respect to each parameter p_i , assigned. Then the following values,

$$\min Q_0(p_{10} \pm n_1 h_1, p_{i0}), \dots, \min Q_0(p_{i0}, p_{40} \pm n_4 h_4)$$

are to be computed, where $n_i = 0, 1, 2, \dots$, and the minimum among them is assumed to be $Q_1(p_{11}, \dots, p_{41})$. This process continues until $n_1 = \dots = n_4 = 0$, at some s th iteration, when Q_s is considered as Q_{\min} for the model in question, and p_{1s}, \dots, p_{4s} , as the optimal set of parameters. In fact, this iterative algorithm examines the neighborhood of a global feasible minimum, which function (6) always possesses. A corresponding program was written for the personal computer Apple II (in Basic).

Воспроизвожу весь этот позорный фрагмент текста как он был, ничего не приукрашая. Он ещё и потому позорен, что английский тут детский: neighbourhood стоит вместо vicinity (я попросту не знал этого слова), настоящее время вместо прошедшего...

Процесс подсчёта ещё невероятно усложнялся тем, что для общего случая, для произвольного a , нужно ведь было ещё и трансцендентное уравнение (M4) на каждом шаге решать. Тут уж, конечно, без вложенного цикла было не обойтись. Но, соответственно, и времени эти подсчёты, на медленном Apple II, отнимали так много, что сейчас и вообразить неловко. Надо полагать, что я днями это считал... если не неделями... Кажется, иногда оставлял Apple II в работе на ночь.

Очень не хотелось, но я заставил себя воспроизвести сейчас, в декабре 2019 года, всё это «динамическое программирование» 1986 года — точнее, не всё, а с важной оговоркой: в MATLABе есть функция `vpsolve`, решающая трансцендентное уравнение, а это — гора с плеч. Итак, кладу $a = 164.4$, приписываю какие-то реалистические значения коэффициентам k и g и с помощью `vpsolve` варьирую x_0 ; программа простенькая, с двумя циклами, но её стоит привести для памяти, потому что не очень я с MATLABом освоился:

```

xd = [1 10.5 26.2 52.7 62.7 67.7 71.5 75.2 75 78.7];
td = [0 24 43 96 120 144 168 192 264 336];
% коэффициенты из статьи 1987: x0=7.29; k = 0.08915; g = 75.33; a = 164.4; →98.842613
a = 164.4;
k = 0.09031;
g = 75.22;
fprintf(['a = %1.2f k = %2.5f g = %2.2f \n'], a, k, g)
% x0 = 7.14 sum = 98.665104
for x0 = 7.15 :-0.01 :7.13;
syms x
sum = 0;
for i = 1: 10
f = vpsolve ( (g+a)*log(x./x0) - a.*log ((g-x)/(g-x0) ) == g*k*td(i), x);
y(i)=f;
sum = sum + (y(i) - xd(i)).^2;
end;
fprintf(['x0 = %1.2f sum = %2.6f \n'], x0, sum)
end

```

(Естественно, векторы xd и td — это и есть мой первый опыт с дуналиеллой в 1986 году.)

Тем же способом вслед за x_0 подбираю k и g ... и что же оказывается?! Оказывается, что в 1986 году в Иерусалиме, с топором в руках, я получил сумму наименьших квадратов для $a = 164.4$ равной 98.842613, а сейчас, с помощью `vpsolve`, — 98.665104. Результат близкий. Можно заключить, что в 1986 году я работал честно и тщательно. Ну, и сейчас тоже очень старался...

Повторю, что само это значение — $a = 164.4$ — взято с потолка. В ходе тогдашнего «динамического программирования», прекрасно видя, что Σ с увеличением a убывает, я просто решил на чём-то остановиться, остановился на $a = 164.4$, и тут уж сил и усердия не пожалел. Молодец!

Нечего и говорить, что с помощью MATLABа я сейчас получаю дома за секунды и минуты то, на что в 1986 году в университете уходили часы и дни. Но ведь на изучение MATLABа у меня сейчас, в 2019 году, тоже уходили часы и дни...

Строю гиперболу с уточнённым значением суммы наименьших квадратов для $a = 164.4$, получаю:

$$C = 4239.657383,$$

$$B = 22.107220,$$

$$\Sigma = 0.010850 \text{ — заметное улучшение против } \Sigma = 0.054502 \text{ с иерусалимской точкой.}$$

Не зря старался!

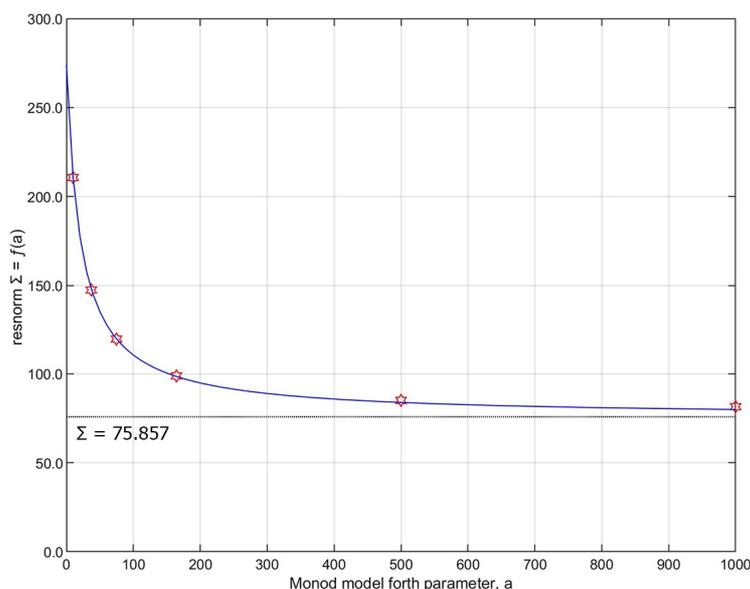
Только что описанным способом, вслед за точкой $a = 164.4$, получаю значения Σ ещё для трёх точек: $a = 10$, $a = 500$ и $a = 1000$. Присоединяю к ним два значения для $a = 0.5g$ $a = g$ и получаю уже шесть точек для гиперболы $f(a)$:

x_0	k	g	a	$\Sigma(x_i - x_{id})^2$
8.86	0.02175	73.34	10	210.115856
8.15	0.033938	74.27	37.136*	147.439748

7.64	0.050681	74.80	74.80**	119.538069	
7.29	0.08915	75.33	164.4	98.842613	← 1986
7.14	0.09031	75.22		98.665104	← 2019
6.71	0.23800	75.58	500	84.073516	
6.57	0.4581	75.68	1000	80.066788	
6.41	Inf ***	75.86	Inf***	75.857465	
6.41	0.033372	75.86	—	75.857465	logistic

* $a = 0.5g$ ** $a = g$ *** $k/a = \text{constant}$, $a \rightarrow \infty$, $kg/a \rightarrow 0.03337$ (logistic)

Строю гиперболу (M17) по шести точкам с помощью метода наименьших квадратов (lsqcurvefit):



Значение наименьшей суммы квадратов отклонений в этом случае $\Sigma = 0.150373$ — лучше не надо (значения параметров $B = 4190.316015$, $C = 21.222801$). Для сравнения применяю метод наименьших квадратов к экспоненте (M18), получаю: $\Sigma = 431.589482\dots$

Итак, $f(a)$ — гипербола, последние сомнения в этом отпали. При возрастании параметра a кривая Моно сходится к логистической кривой по гиперболе, локальных минимумов нет, следовательно лучший Моно для первого моего опыта 1986 года с дуналиеллой — логистический... Не знаю, как понимать это наблюдение: закон ли природы я открыл или велосипед изобрёл.

Перехожу ко второму опыту... точнее, вчера перешёл, а сегодня — 14 декабря 2019, карточная годовщина.

Во втором опыте — тоже десять точек, причём точки на оси абсцисс те же:

$td = [0 \ 24 \ 43 \ 96 \ 120 \ 144 \ 168 \ 192 \ 264 \ 336];$

$xd = [6 \ 26 \ 48 \ 65 \ 74.5 \ 82.5 \ 84.5 \ 87.7 \ 91.7 \ 100.2];$

Первый частный случай: $a = 0.5g$ (выражение (M8)). Получаю:

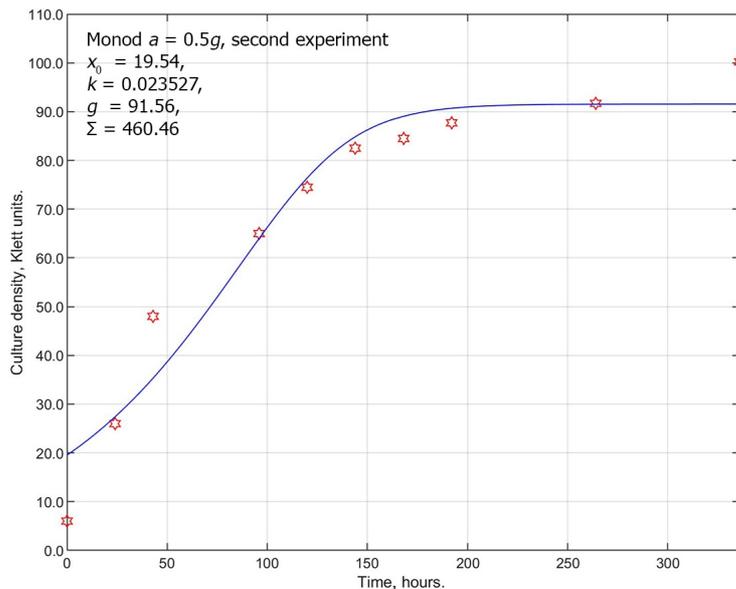
$x_0 = 19.543792,$

$k = 0.023527,$

$g = 91.554897,$

$\Sigma = 460.457993$

Вот этот график:



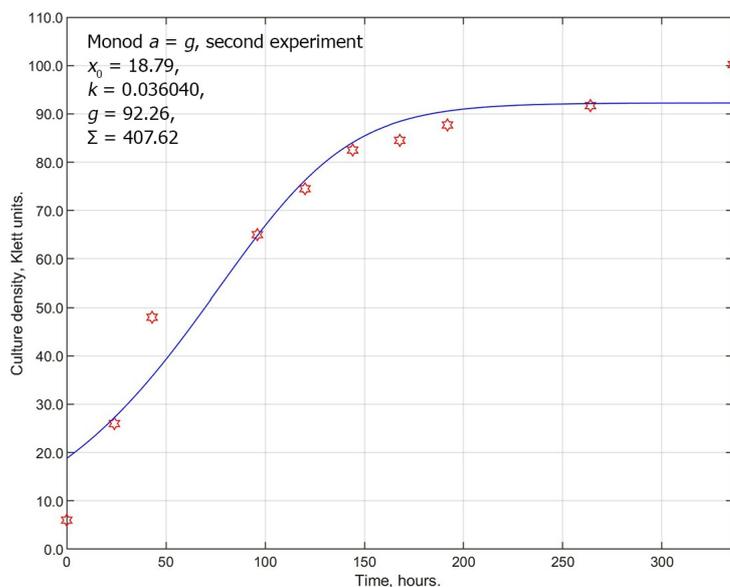
Второй частный случай: $a = g$:

$$x_0 = 18.788681,$$

$$k = 0.036040,$$

$$g = 92.254881,$$

$$\Sigma = 407.621601$$



Все параметры, вычисленные с помощью `lsqcurvefit`, я записываю с шестью знаками после десятичной точки, хотя, ей-богу, четырёх знаков достаточно.

Две точки на графике $f(a)$ получены. Третья точка в моей статье 1987 года — $a = 789.2$ — такая же условность, как и в первом опыте: кривая Моно сходится к логистической кривой при возрастании a , а я не хочу расстаться с кривой Моно и останавливаюсь на $a = 789.2$, — вот и вся моя тогдашняя логика. Для этой точки получаю теперешние цифры:

$$a = 789.20$$

$$x_0 = 17.37$$

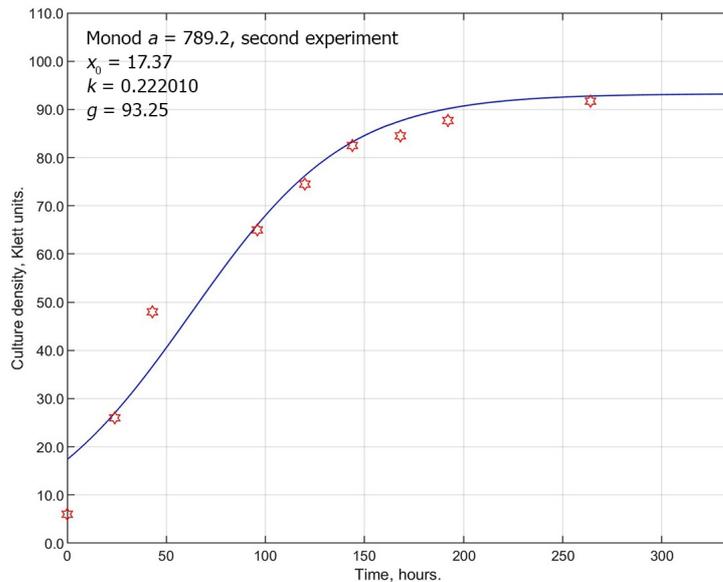
$$k = 0.222010$$

$$g = 93.25$$

$$\Sigma = 329.7645502$$

Всюду в этих моих теперешних подсчётах, где параметр a назначен, а остальные параметры подбираются в лоб, один за другим методом «динамического программирования» (с помощью функции `vpsolve`, решающей для каждой итерации трансцендентное уравнение), — параметры x_0 и g я вычисляю с точностью до второго знака после десятичной точки, что уже — перебор точности, замеры-то мои оптические, в единицах Клетта, только один знак после запятой улавливали, да и тот сомнительный; а параметр k вычисляю с точностью до шестого знака после десятичной точки, хотя ему, по моей догадке, и трёх, а то и двух знаков хватает за глаза и за уши.

Вот этот график для $a = 789.20$ и, предположительно, минимальной (лучшей!) суммы квадратов отклонений $\Sigma = 329.7645502$:



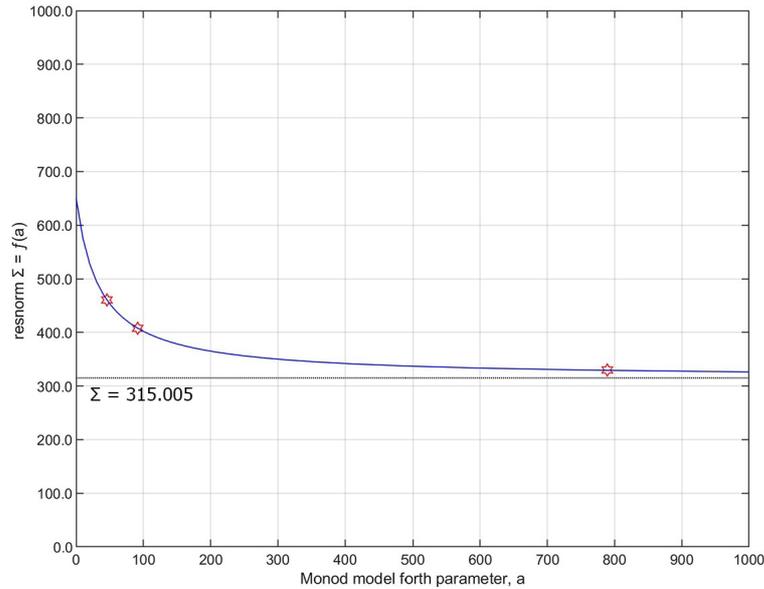
...Видно, что кривая Моно к моему второму опыту с дуналиеллой подходит совсем уж плохо...

Но вот что очень хорошо: если на этот последний график наложить график, соответствующий параметрам 1986 года:

$$\begin{aligned} a &= 789.20; \\ x_0 &= 17.60; \\ k &= 0.21901; \\ g &= 93.40; \end{aligned}$$

то нужно зрение получше моего, чтобы увидеть две кривых; я — вижу одну, кое-где чуть-чуть утолщающуюся. Кстати, и подсчёт наименьшей суммы квадратов отклонений в 1986 году для $a = 789.20$ я сделал идеально: получил 330.05, а сегодня, во всеоружии MATLABa, получаю... 330.0472011. Лучше не бывает.

Строю по трём точкам гиперболу $f(a)$ с помощью метода наименьших квадратов и функции `lsqcurvefit`.



Здесь минимальная сумма квадратов отклонений = 0.297549, то есть совпадение получилось прекрасное, да и на графике видно, что точки аккуратно легли на кривую. А что для первого опыта совпадение было ещё лучше (0.054502), так там три точки не так далеко были разнесены вдоль оси абсцисс, да и вообще там кривая Моно лучше подходит для описания экспериментальных данных. Параметры гиперболы для второго эксперимента получились такие: $B = 35.042067$, $C = 11749.456133$, где асимптота $A = 315.005012$ есть минимальная сумма квадратов для логистической кривой, к которой сходится кривая Моно.

Вот таблица:

x_0	k	g	a	$a/(\text{kg})$	kg/a	$\Sigma(x_i - x_{id})^2$	
19.543792	0.023527	91.554897	45.7774*	21.2524	0.0471	460.457993	
18.788681	0.036040	92.254881	91.5549**	27.7467	0.0360	407.621601	
17.60	0.21901	93.40	789.2	38.5813	0.02592	330.05	← 1986
17.37	0.222010	93.25		38.12112	0.026232	329.7645502	← 2019
	Inf***		Inf***				
16.993895	0.024968	93.389847	—	—	—	315.005012	logistic

* $a = 0.5g$, ** $a = g$, *** $k/a = \text{constant}$, $a \rightarrow \infty$, $\text{kg}/a \rightarrow 0.03337$

Не думаю, что нужно находить ещё точки. Картина ясна. Зависимость $f(a)$ — монотонно-убывающая гипербола; минимумов нет. Лучшая кривая Моно для второго моего опыта с дуналиэллай (как и для первого) — логистическая кривая.

Перехожу к третьему опыту.

Первый частный случай: $a = 0.5g$ (выражение (M8)). Получаю:

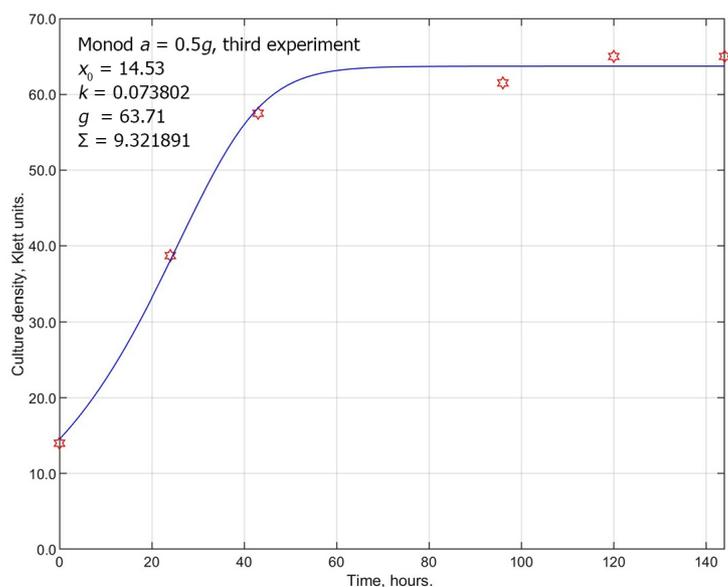
$$x_0 = 14.528766,$$

$$k = 0.073802,$$

$$g = 63.711114,$$

$$\Sigma = 9.321891$$

Вот этот график:



Второй частный случай: $a = g$:

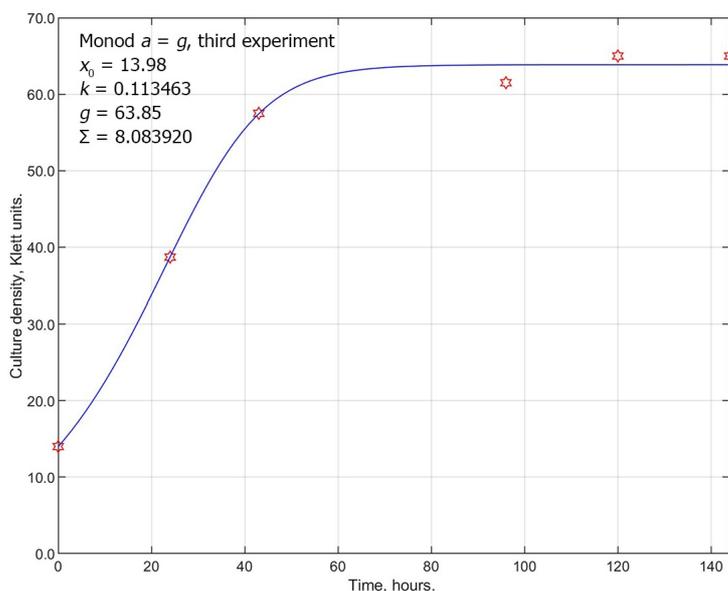
$$x_0 = 13.982543,$$

$$k = 0.113463,$$

$$g = 63.851122,$$

$$\Sigma = 8.083920$$

Вот график:



Тут моё триумфальное шествие кончается: суммы Σ для $a = 0.5g$ и $a = g$ — заметно меньше наименьшей суммы для логистической кривой по данным 1986 года ($\Sigma = 13.824$)! Кривая Моно — лучше логистической применительно к данным моего третьего опыта с дуналиеллой! Вычисляю наименьшую сумму квадратов для логистической кривой с помощью функции `lsqcurvefit`, получаю $\Sigma = 11.339163$, что заметно меньше 13.824, но тоже хуже теперешних значений для $a = 0.5g$ и $a = g$ (удивляет, что в 1986 году я допустил такую большую ошибку, обчитывая третий опыт, тогда как для первого и второго опыта тогдашние цифры практически совпадают с теперешними). В 1986 году, хоть цифры и не совпадают, но вывод получился тот же: наименьшая сумма квадратов отклонений равна соответственно $\Sigma = 9.684$ для Моно

(при $a = 29.59$) и $\Sigma = 13.824$ для логистики, то есть кривая Моно описывает мой третий опыт с дуналиеллой лучше логистической кривой... Приходится допустить, что при увеличении параметра a кривая Моно сходится к логистической не по гиперболе (M17), а по кривой более сложной.

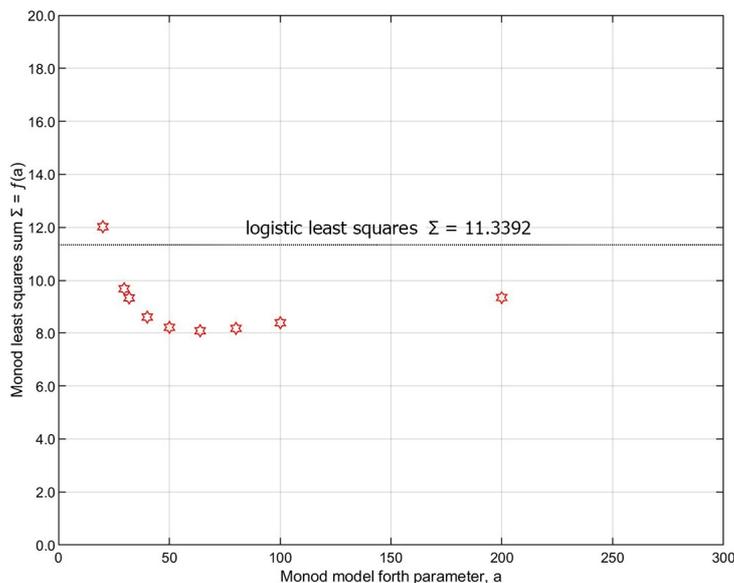
Проверяю полученную в 1986 году цифру $\Sigma = 9.684$ для $a = 29.59$, получаю с помощью `rsolve` $\Sigma = 9.6378908$, — совпадение хорошее... заодно косвенным образом проверяю мою теперешнюю программу и аккуратность внесения в неё результатов опыта 1986 года... потому что ошибки от рассеянности подстерегают меня на каждом шагу.

Итак, у меня имеются три точки на графике кривой $f(a)$: для $a = 0.5g$, $a = g$ и $a = 29.59$.

Получаю четвёртую точку для $a = 20$ «методом динамического программирования» с помощью `rsolve` (фиксировав $a = 20$, варьирую по очереди три оставшихся параметра). При этом параметр k вычисляю с точностью до четвёртого знака после десятичной точки.

Ставлю ещё пять точек на графике $f(a)$: для $a = 40, = 50, = 80, = 100, = 200$ тем же способом, причем коэффициент k опять вычисляю с точностью до четвертого знака (что вполне достаточно; пятый знак на графике не разглядишь), а x_0 и g — до второго знака, что — едва ли не с избытком, ведь в моих оптических замерах плотности биомассы (в единицах Клетта) и первый-то знак после точки сомнителен. Муторная работа эти вычисления! но охватывающую программу в четыре цикла всё-таки писать не хочу... Сегодня 15 декабря 2019.

Итак, у меня уже девять точек:



До получения точки $a = 200$ я думал, что кривая будет представлять собою этакую змею: затухающие колебания вокруг асимптоты. Сейчас вижу из точек на графике, что у кривой есть один минимум и точка перегиба, и кривая приближается к асимптоте снизу. Значит, скорее всего, это сумма двух гипербол, убывающей и возрастающей:

$$f(a) = \frac{C}{B + a} + \frac{Ea}{D + a} + F \quad (M19)$$

где параметры B, C, D, E и F подлежат определению методом наименьших квадратов, причем асимптота (M19) равна $F + E = 11.339163$, ведь при возрастающем параметре a кривая Моно сходится к логистической, а для последней наименьшая сумма квадратов

отклонений для третьего опыта равна 11.339163 (по моим сегодняшним подсчётам). Я настолько уверен, что мои девять точек лягут на эту кривую, что хочу сперва исследовать простенькую зависимость (M19).

Чтобы две гиперболы, составляющие (M19), были, соответственно, убывающей и возрастающей, B и C для первой и D и E для второй должны иметь один и тот же знак. Чтобы избежать особых точек в первом квадранте (обращения в бесконечность $f(a)$), коэффициенты B и D должны быть положительны. Они, кроме того, строго положительны. Условие $C = 0$ уничтожает убывающую гиперболу: превращает $f(a)$ в гиперболу возрастающую. Коэффициент $B \neq 0$, потому что функция $f(a)$ по своему физическому смыслу вообще никогда не обращается в бесконечность, ведь замеры в ходе любого опыта делаются в течение конечного времени и ординаты их конечны; то есть функция $f(a)$ всегда пересекает ось ординат при положительном B . Коэффициент $D \neq 0$ потому, что обращение его в нуль уничтожает возрастающую (вторую) гиперболу как функцию a , тем самым превращая функцию (M19) в простую гиперболу типа (M17) с асимптотой $E + F$, не имеющую конечного экстремума. Если же забыть о физическом смысле и не требовать наличия экстремумов, то допустимо рассматривать случаи $C = 0$, $D = 0$ и $B = 0$, только не разом, а по отдельности.

Параметр F может быть любого знака. Его значение влияет только на ординату асимптоты и экстремума, но никак не влияет на абсциссу экстремума, конечного или бесконечного, поскольку он уничтожается при взятии производной.

Берём производную от правой части (M19) и приравниваем её к нулю для нахождения экстремумов:

$$\frac{-C(D+a)^2 + ED(B+a)^2}{(D+a)^2(B+a)^2} = 0 \quad (\text{M20})$$

Знаменатель (M20) положителен или обращается в бесконечность при $a = -B$ и $a = -D$. Эти особые точки образуют асимптоты-вертикали. Для получения экстремумов в обычных конечных точках приравниваем к нулю числитель. При $C = ED$ квадратное уравнение в числителе вырождается в линейное, так что уравнение (M20) имеет *единственный отрицательный* корень:

$$a_0 = -\frac{D+B}{2} \quad (\text{M21})$$

который лежит в точности посередине между двумя асимптотами-вертикалями $a = -B$ и $a = -D$. Остаётся взять производную от (M20), то есть найти вторую производную от $f(a)$, и подставить туда a_0 . По известному правилу, если вторая производная окажется отрицательной, в точке a_0 — максимум, если положительной — минимум. Точку a_0 будем называть средней, или центральной.

Производная от (M20) есть сумма двух слагаемых: производной от числителя (M20), делённой на знаменатель как он есть, плюс числитель (M20) как он есть, умноженный на производную от знаменателя. Для наглядности рассмотрим оба слагаемых по отдельности. Первое слагаемое имеет вид

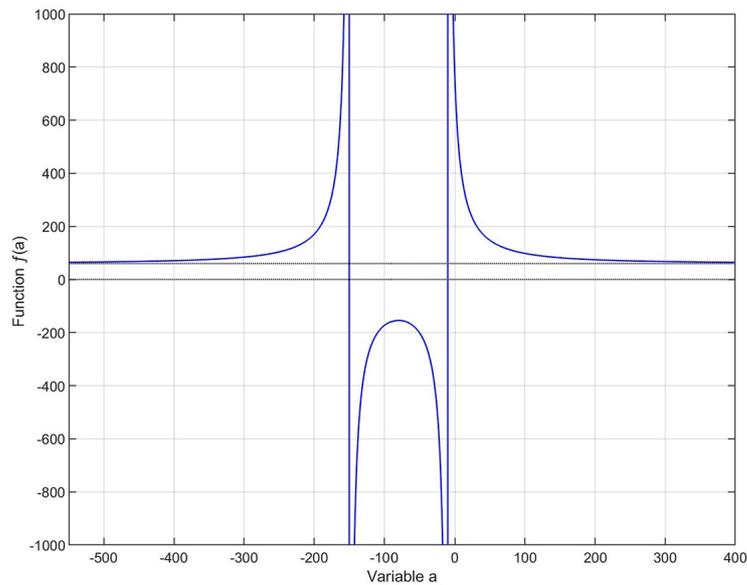
$$\frac{-2C(D+a) + 2ED(B+a)}{(D+a)^2(B+a)^2} \quad (\text{M22})$$

Второе слагаемое после преобразований принимает вид:

$$-4 \frac{((D+a)^2 + (B+a)^2)(-C(D+a)^2 + ED(B+a)^2)}{(D+a)^3(B+a)^3} \quad (\text{M23})$$

Пусть $B < D$. Подставляя $(B + a_0) = (B - D)/2 < 0$, $(D + a_0) = (D - B)/2 > 0$ в (M22), видим, что выражение (M22) в точке a_0 отрицательно. Выражение (M23) содержит в качестве множителя числитель первой производной (M20), который мы приравняли к нулю для получения корня, — приравняли, напомню, не обязательно только для $C = ED$; это верно и для общего случая, — следовательно, второе слагаемое второй производной равно нулю в точке a_0 и вообще всегда. В итоге вторая производная функции $f(a)$ совпадает с выражением (M22), причём при $B < D$ она отрицательна, то есть экстремум (M21) — максимум. При $B > D$ этот экстремум — минимум.

Вот пример для $B < D$ ($B = 10$, $C = 7500$, $D = 150$, $E = 50$, $F = 10$):



(Здесь по осям отложены аргумент и функция выражения (M19) для *общего случая*, не для уравнения Моно, поэтому и надписи по осям я даю отвлечённые. Всё, что имеет отношение к уравнению Моно (применительно к физике и биологии моего третьего опыта с дуналиеллой, сосредоточено только в первом квадранте.)

Соответственно, для $B > D$ эту картинку нужно перевернуть вниз головой. Между вертикальными асимптотами *всегда* будет свисающий сверху минимум... что он всегда свисает, покажу чуть позже.

Всё это пока — для вырожденного случая $C = ED$. Если вдобавок положить и $B = D$, получаем уже полное вырождение: кривая $f(a)$ схлопывается в свою асимптоту $f(a) = E + F$ с исключением из этой асимптоты точки $a = -D$ ($\equiv -B$), в которой функция не определена (равна $\pm \infty$). Понять и вообразить это совсем несложно: достаточно начать мысленно сближать вертикальные асимптоты и при этом держать в уме, что язык экстремума в шахте между асимптотами стягивается в вертикальную линию с абсциссой $a = -(B + D)/2 \equiv -D$ ($\equiv -B$), а обе гиперболы, — по мере того, как их скругления заостряются, чтобы в итоге стать прямыми углами, — стягиваются к горизонтали $f = E + F$ и вертикали $a = -D$. В итоге в точке $(-D, E + F)$ функция $f(a)$ перестаёт существовать (обращается в $\pm \infty$), зато во всех прочих точках она — прямая $f(a) = E + F$: совпадает с горизонтальной асимптотой.

Рассмотрим случай отсутствия корней: $D = B$, $C \neq ED$. Функция (M19) принимает вид

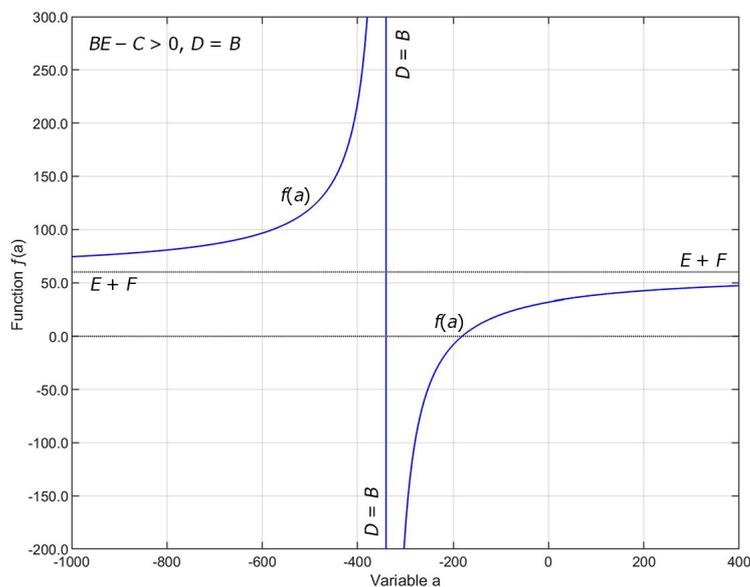
$$f(a) = \frac{C + Ea}{B + a} + F \quad (\text{M19}')$$

то есть превращается в простую гиперболу типа (M17), в чём легко убедиться подстановкой $x = B + a$. Экстремумов при этом вовсе нет. Это видно и при лобовом подходе, — если приравнять к нулю производную от (M19')

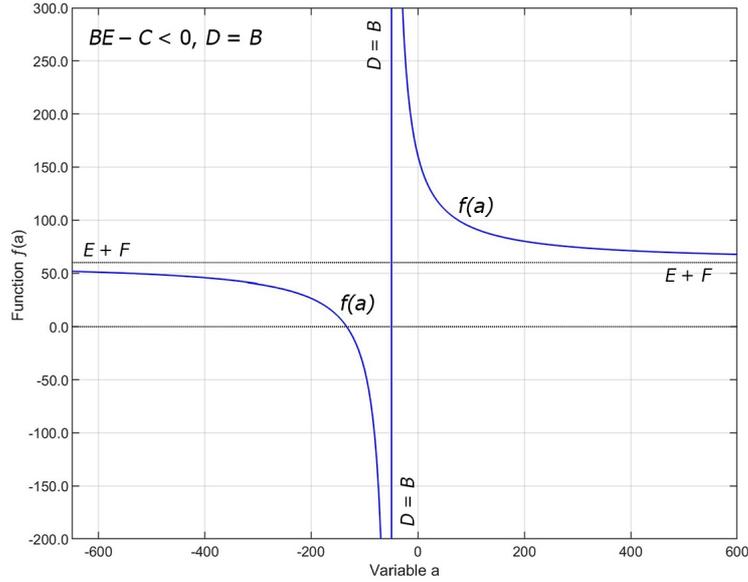
$$\frac{BE - C}{(B + a)^2} \quad (M20')$$

Здесь числитель, по условию $D = B$ и $C \neq ED$, не равен нулю, то есть корни отсутствуют. Если же принять всё-таки, что в (M20) числитель обращается в нуль, то выходит, что $BE = DE = C$ и при любом аргументе $a \neq D = B$, ведь числитель совсем не зависит от a , что может означать только одно: функция $f(a)$ — прямая, параллельная оси абсцисс: $f(a) = C/B + F = E + F$. Мы повторили только что сделанный вывод более формально.

При $D = B$ и $BE \neq C$ правая часть (M20'), иначе — производная от $f(a)$, не обращается в нуль, но из (M20') мы получаем сведения об её знаке и, стало быть, о характере поведения $f(a)$. Именно, при $BE - C > 0$, функция $f(a)$ в (M19') — возрастающая (беру для примера $B = 340, C = 7500, D = 340, E = 50, F = 10$ и строю график для этих чисел):



а при $BE - C < 0$ функция $f(a)$ — убывающая ($B = 50, C = 7500, D = 50, E = 50, F = 10$):



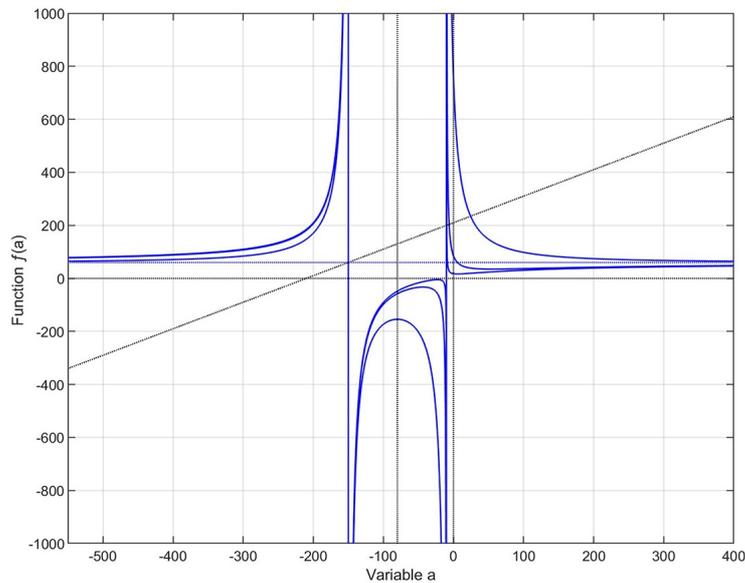
Рассмотрим общий случай $ED - C \neq 0$. Приравниваем к нулю числитель в (M20), получаем квадратное уравнение относительно a

$$(ED - C)a^2 + 2D(BE - C)a + D(B^2 - CD) = 0 \quad (M24)$$

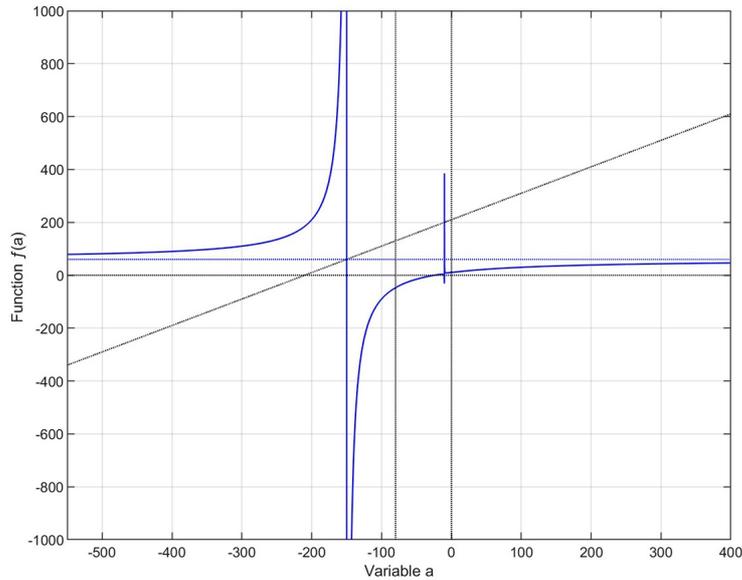
и его решение:

$$a_{1,2} = \frac{-D(BE - C) \pm |D - B| \sqrt{EDC}}{ED - C} \quad (M25)$$

Фиксируем параметры D и B . Устремив в (M25) параметр C к бесконечности при фиксированном E (или параметр E к нулю при фиксированном C), видим, что *оба корня* сходятся при этом к асимптоте $a = -D$. Из этого заключаем, что корни лежат по разные стороны этой асимптоты, ведь они различаются и равны только в пределе. Устремив C к нулю при фиксированном E (или E к бесконечности при фиксированном C), видим, что оба корня сходятся к асимптоте $a = -B$, и тоже, разумеется, с разных сторон от этой асимптоты. Вот пример для $B = 10$, $D = 150$, $E = 50$, $F = 10$ и уменьшающегося C , принимающего значения $= 7500$ (средняя точка), $= 750$, $= 75$:



Из графика видно, что при уменьшении C экстремумы *тянутся друг к другу и в итоге сливаются*,



при чём возникает обычная гипербола с единственной точкой разрыва $a = -B$, лежащая в осях $a = -D$ и $f(a) = E + F$ и симметричная относительно диагонали $f(a) = a + D + E + F$.

Итак, один из корней всегда лежит внутри вертикальных асимптот (в шахте на отрезке оси абсцисс $a \in (-D, -B)$). Если он сдвинут вправо по отношению к центральной точке $-(D + B)/2$, что достигается условием $ED - C > 0$, наружный экстремум, сопряженный экстремуму в шахте, лежит правее правой асимптоты $a = -B$, а слева от асимптоты $a = -D$ экстремума нет, ведь корней в квадратном уравнении только два. Если экстремум внутри шахты асимптот сдвинут влево от центральной точки, сопряженный ему экстремум лежит левее левой асимптоты $a = -D$, а правее правой асимптоты $a = -B$ экстремума нет.

Выпишем ещё раз, чтобы далеко не возвращаться, выражение (M22) второй производной от функции $f(a)$, знак числителя которого (при всегда положительном знаменателе) определяет характер экстремума:

$$\frac{-2C(D + a) + 2ED(B + a)}{(D + a)^2(B + a)^2} \quad (\text{M22})$$

Мы видели, что при $B < D$ выражение отрицательно для одной из точек $a \in (-D, -B)$, именно, для средней точки $-(D + B)/2$. Но это справедливо и для всех точек интервала, ведь суммы $(D + a)$ и $(B + a)$ имеют на этом отрезке разные знаки. Пусть теперь точка экстремума $a \in (-\infty, -D)$. Сумма $(D + a)$ при этом отрицательна и по абсолютной величине больше суммы $(B + a)$, тоже отрицательной, а $ED - C < 0$, потому что мы слева от центральной точки. Значит, числитель положителен для всех $a \in (-\infty, -D)$, и экстремум, лежащий левее точки $-D$, — минимум. Сходным образом убеждаемся, что при $B < D$ всякий экстремум, лежащий правее точки $-B$, — минимум.

При $B > D$ получаем, соответственно, обратную картину: в интервале $a \in (-D, -B)$ имеем минимум, а в интервалах $a \in (-\infty, -B)$ и $a \in (-D, -\infty)$ — максимум.

Вероятно, всё это следовало бы доказать более строго, но Аристотель не велит слишком углубляться в предмет исследования, поскольку это ведёт к узости и унижает в нас человеческое достоинство... Косьма Прутков говорит об этом веселее: специалист подобен флюсу, но мысль — та же. Главное мы увидели и почувствовали.

Не допускаю мысли, что никто никогда не исследовал эту простенькую зависимость (M19) так дотошно, как я. Однако ж и то верно, что нужды в таком исследовании нет. Для студента-математика задача слишком проста, для советской школы моих отроческих лет — слишком сложна. Потребовалось это копание — только ради наслаждения, с которым я рассматривал этот вопрос на старости лет. Всё, сказанное тут про зависимость (M19) было с моей стороны лирическим отступлением чистой воды. К исследованию свойств уравнения Моно применительно к моему третьему опыту с дуналиеллой — прямого отношения это не имело. Конечно, можно сказать, что я получил необходимое и достаточное условие существования минимума кривой (M19) в первом квадранте (где сосредоточена физика и биология задачи) в форме неравенств $B < D$, $ED - C > 0$. Но ведь коэффициенты (M19) найдутся сами собою с помощью метода наименьших квадратов, и, конечно, будут отвечать этому необходимому и достаточному условию, иначе нет ни физики, ни биологии... Сегодня 22 декабря 2019.

Проводим кривую (M19) с помощью метода наименьших квадратов (то есть функции `lsqcurvefit` МАТЛАВа) через уже имеющиеся у меня девять точек функции $f(a)$. Коэффициенты получаем такие:

$$\begin{aligned} B &= 15.335, \\ C &= 1613.803, \\ D &= 28.870, \\ E &= 76.429, \\ F &= -64.936, \end{aligned}$$

а сумму наименьших квадратов отклонений $\Sigma = 0.002818...$ Совпадение более чем идеальное. Сумма — меньше трёх тысячных, при девяти точках и порядочном размахе функции $f(a)$ по осям. Тем самым форма кривой доказана... Правда, МАТЛАВ выбрасывает в конце неприятное сообщение:

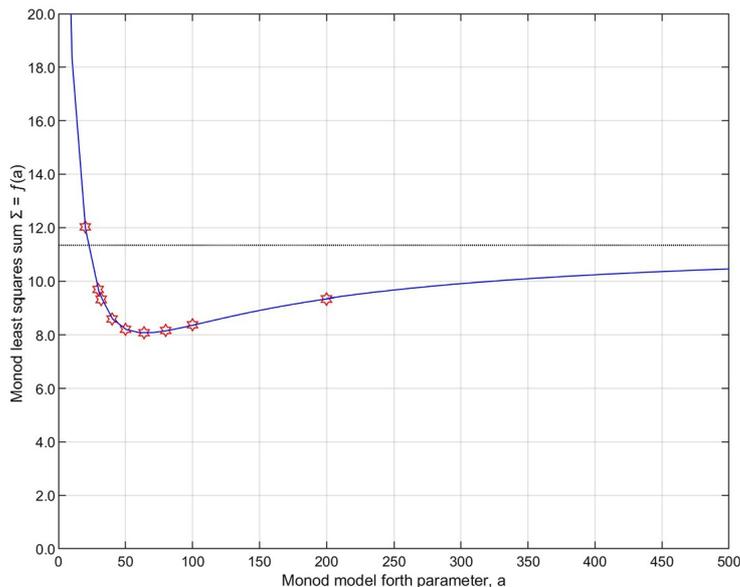
```
Solver stopped prematurely.
lsqcurvefit stopped because it exceeded the function evaluation limit,
options.MaxFunctionEvaluations = 5.000000e+02 (M23)
```

то есть в программе МАТЛАВа задано максимальное число итераций, и в данном случае программа в это число не уложилась. Происходит это при неудачном задании начальных значений параметров B , C , D , E и F . В моём случае было задано [1, 1, 1, 1, 1], что, конечно, очень далеко отстоит от реалистической картины. Если задать начальные параметры близкими к полученным, предостережение (M23) пропадает, сменяясь обычным текстом:

```
Local minimum possible.
lsqcurvefit stopped because the final change in the sum of squares relative to
its initial value is less than the value of the function tolerance.
<stopping criteria details>
Local minimum possible.
lsqcurvefit stopped because the final change in the sum of squares relative to
its initial value is less than the value of the function tolerance.
```

свидетельствующим о благополучном завершении работы `lsqcurvefit`.

Перестраховки ради проверяю полученный результат прямым подсчётом, без функции `lsqcurvefit`: беру полученные коэффициенты, вставляю их в формулу (M19), вычисляю девять разностей для моих девяти точек $(a, f(a))$ и получаю ту же самую сумму $\Sigma = 0.002818$. Да и из графика видно, что точки прекрасно легли на кривую:



Вообще нужно помнить, что функция `lsqcurvefit` очень чувствительна к начальным условиям и зачастую даёт очень разные искомые коэффициенты — при, однако ж, очень близких значениях главного показателя: суммы наименьших квадратов отклонений. А бывают и такие ситуации, когда поначалу выходит такой вздор, что можно испугаться...

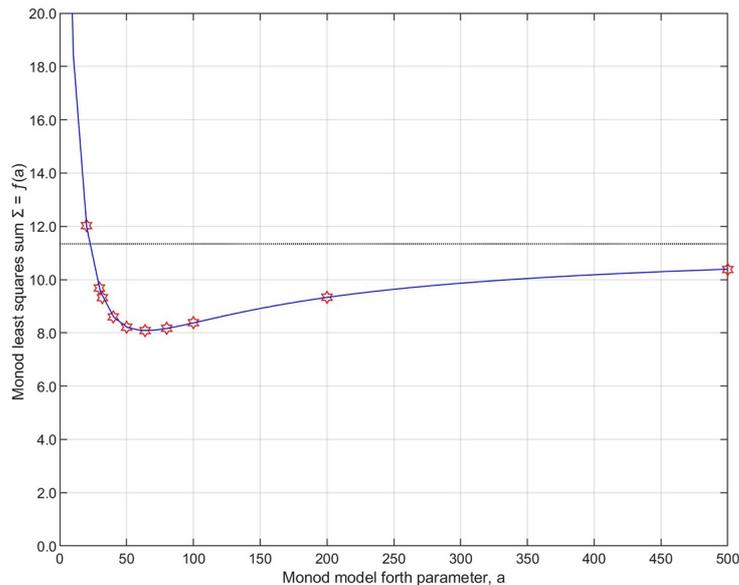
Несколько больше меня тревожит то, что полученное значение асимптоты $E + F = 11.493059$ расходится с наименьшей суммой квадратов отклонений для логистического уравнения (11.339163) уже в первом знаке после десятичной точки. В сущности, это пустяк, не ставящий под сомнение ничего принципиального. Мало ли где могли возникнуть ошибки вычислений, при таком-то количестве итераций. Но я дотошен. Добавляю десятую точку ($a, f(a)$) для параметра $a = 500$. Она получается такая (500, 10.3756240). Применяю метод наименьших квадратов к десяти точкам. Чудо продолжается: и асимптота улучшена, и даже сумма наименьших квадратов стала меньше: $E + F = 11.381005$, $\Sigma = 0.001399...$ я бы сказал, стала слишком мала, неправдоподобно мала. А коэффициенты вышли заметно отличными:

$$\begin{aligned} B &= 18.376804, \\ C &= 5342.797796, \\ D &= 22.585085, \\ E &= 261.294597, \\ F &= -249.913592. \end{aligned}$$

Подставляю эти коэффициенты в `lsqcurvefit` в качестве начальных условий и опять получаю другой ряд коэффициентов:

$$\begin{aligned} B &= 18.624266 \\ C &= 6150.862636 \\ D &= 22.297045 \\ E &= 300.856830 \\ F &= -289.485018 \end{aligned}$$

при этом и асимптота (11.371812), и сумма (0.001383) чуть-чуть улучшаются. Из этого видим, в какой степени можно полагаться на функцию `lsqcurvefit`. Разумеется, на графике все эти тонкости совершенно неразличимы:



Из решения квадратного уравнения (M24)/(M25) получаю для уравнения Моно применительно к результатам моего третьего опыта 1986 года с дуналиеллой: $a_{\min} = 64.173928$. Подставляю это число в двойную гиперболу (M19) и получаю вожаделенный минимум $f(a) = 8.082197\dots$ которому не верю, ведь он получен на основании коэффициентов B, C, D, E и F , а мы только что видели, что эти коэффициенты получаются через функцию `lsqcurvefit` очень разные, от начальных условий зависят.

Проверяю полученную точку (64.173928, 8.082197) моим обычным «методом динамического программирования» — и она не подтверждается: при $a = 64.173928$ мой метод (которым получены все прочие очки, кроме точек $a = g$ $a = 0.5g$, полученных по формулам) даёт расхождение уже в третьем знаке: 8.0839909. Сумма, полученная по формуле (M5) при $a = g$, — лучше суммы, полученной через гиперболу (M19) и все эти передраги: (63.851122, 8.0839205). Её и объявляю оптимальной. Поиск причин расхождений столь незначительных ничего не изменит. Задача в принципе решена. Случайно вышло, что формально самое простое решение (для $a = g$) оказалось и самым лучшим... случайно потому, что ведь мой топорный опыт с дуналиеллой дал совершенно случайные точки.

Привожу таблицу моих полуторамесячных подсчётов:

x_0	k	g	a	$a/(\text{kg})$	kg/a	$\Sigma(x_i - x_{id})^2$	
14.96	0.0586	63.59	20	5.36715	0.186319	12.0255566	
14.76	0.0701	63.73	29.59	6.54461	0.152798	9.684	← 1986
14.59	0.0710	63.68				9.6378908	← 2019
14.528766	0.073802	63.711114	31.85556*	6.77488	0.147604	9.321891	$a = 0.5g$
14.30	0.0842	63.75	40	7.45191	0.134194	8.5962252	
14.13	0.0966	63.80	50	8.11283	0.123262	8.2101957	
13.982543	0.113463	63.851122	63.851122**	8.8134	0.1135	8.0839205	$a = g$
13.9840	0.113832	63.852	64.173928 ⁽¹⁾	8.82917	0.113261	8.0839909	8.082197 ⁽¹⁾ “optimal”
13.89	0.1328	63.90	80	9.42738	0.106074	8.1711972	
13.74	0.1573	63.94	100	9.94412	0.100562	8.3817340	
13.57	0.2764	64.02	200	11.30255	0.088476	9.3334324	
13.44	0.6330	64.09	500	12.32469	0.081138	10.3756240	
			1000				
13.348143	0.076174	64.134066	—	—	—	11.339163	logistic

$$*a = 0.5g, **a = g;$$

⁽¹⁾ значения, полученные через коэффициенты двойной гиперболы (M19); полученная при этом сумма наименьших квадратов 8.082197 чуть лучше той, что получена «методом динамического программирования» (8.0839909) для $a = 64.173928\dots$ а эта последняя — несколько хуже суммы 8.0839205 для $a = g$, полученной с помощью формулы (M5)... Но все три суммы — хороши! И мало отличаются одна от другой.

Зачем я здесь вычислял отношения $a/(kg)$ и kg/a , я уже вспомнить не могу. Может быть, график хотел построить... Для меня ведь вся эта математика началась с жажды построить красивые и убедительные графики.

Не стану скрывать, я принялся было вычислять десятую точку $a = 1000$, всё тем же «методом динамического программирования», последовательным варьированием параметров уравнения Моно, — но бросил эту пустую работу... пустую игру... однако игра ведь и всегда — занятие пустое, а тем не менее все люди играют в игры... мы все — представители вида *homo ludens*... Я ведь, собственно говоря, пишу текст вокруг моего прошлого; дневник задним числом. Ну, и довольно об этом. Кажется, в связи с «уравнением Моно» больше сказать нечего.

УРАВНЕНИЕ РИЧАРДСА

Вот оно в моей записи 1986 года:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{kx}{m} \left(1 - \frac{x^m}{g^m} \right) \quad (R1)$$

С этим уравнением, с его происхождением, — полный порядок: никакой фантазии с моей стороны, в отличие от «уравнения Моно». В форме (R1) уравнение было записано самим Ричардсом (Richards). Только неясно, зачем; причём тут дифференциальное уравнение, — ведь с первого взгляда видно, что параметр m — совершенно искусственный, никакого биологического смысла связать с ним нельзя. Уравнение в форме (R1) — простейшая, сама собою напрашивающаяся модификация логистического уравнения для придания ему большей гибкости; логистическое уравнение получается из (R1) при $m = 1$, — только и всего. По мне — писал бы Ричардс сразу решение (R1).

Разделяем переменные в (R1). Замечаем, что

$$\frac{g^m}{x(g^m - x^m)} = \frac{1}{x} + \frac{x^{m-1}}{g^m - x^m} \quad (R2)$$

Используем (R2) при интегрировании. Получаем обратную функцию $t(x)$:

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{x^m}{x_0^m} \frac{g^m - x_0^m}{g^m - x^m} \quad (R3)$$

а из неё и прямую, искомую:

$$x = \frac{g}{\sqrt[m]{1 + \left(\frac{g^m}{x_0^m} - 1 \right) e^{-kt}}} \quad (R4)$$

— проще некуда!

Из (R4) сразу видим: $x = x_0$ при $t = 0$, и $x \rightarrow g$ при $t \rightarrow \infty$; милая чехарда числителя и знаменателя (та же, что и в логистическом уравнении).

Выход кривой Ричардса на плато нагляден как из (R1), так и из (R4). Из правой части (R1) видно, что при $x \rightarrow g$ производная стремится к нулю; это и есть плато.

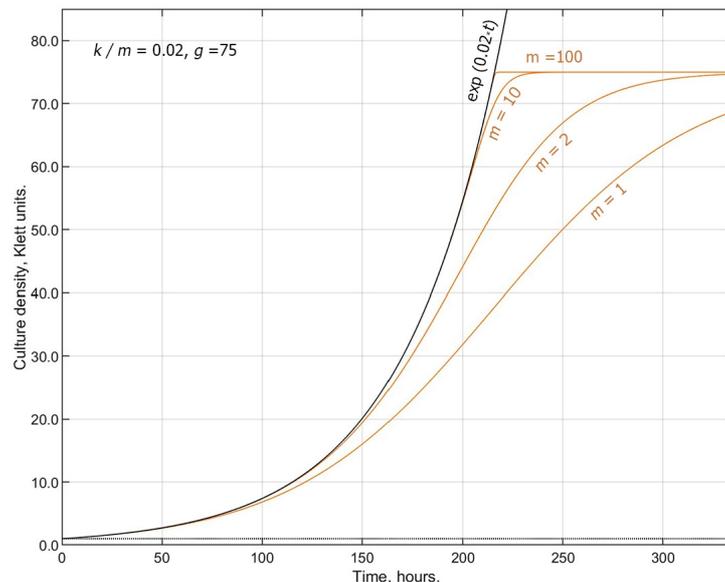
Из (R4) ясно, что $x \rightarrow g$ при $t \rightarrow \infty$, потому что выражение под радикалом убывает с ростом t от g^m/x_0^m до единицы, и не только при любых конечных m , но и при $m \rightarrow \infty$ и постоянном k , — здесь нужно иметь в виду, во-первых, следствие из второго замечательного предела в форме $a^t e^{-t} \rightarrow 0$ (экспонента пересиливает показательную функцию), а во-вторых то, что предельная единица под радикалом в нулевой степени остаётся единицей.

Пусть теперь отношение $k/m = c$ постоянно, $t = t'$ постоянно и $k, m \rightarrow \infty$. Тогда в (R1), при конечном t' и $x' < g$ отношение $(x'/g)^m \rightarrow 0$, уравнение (R1) стремится к $dx/dt = kx/m$, и, следовательно, $x' \rightarrow x_0 \exp(kt'/m)$. То есть: при больших m и больших k кривая Ричардса близка к экспоненте.

Но если в (R4) устремить к бесконечности одновременно k и t при постоянном отношении $k/m = c$, то выражение под радикалом ещё более энергично стремится к единице (экспонента сильнее показательной функции), и $x \rightarrow g$. Из этих не совсем строгих рассуждений видно, что при больших m и больших k кривая Ричардса сперва близка к мальтузианской экспоненте, а с ростом t резко выходит на плато.

Всех этих мелочей я почему-то не упоминаю [в моей статье 1987](#) года: то ли счёл их пустяком, то ли не заметил, то ли — заботился о краткости и сухости изложения; статья-то ведь предположительно биологическая была.

Из графика можно получить некоторое представление о том, что такое большие m и k в модели Ричардса. Пусть фиксированное отношение $k/m = 0.02$ и $g = 75$, тогда уже при $m = 100$ и $k = 2$ мы видим, что экспонента переходит на плато круто, рывком:



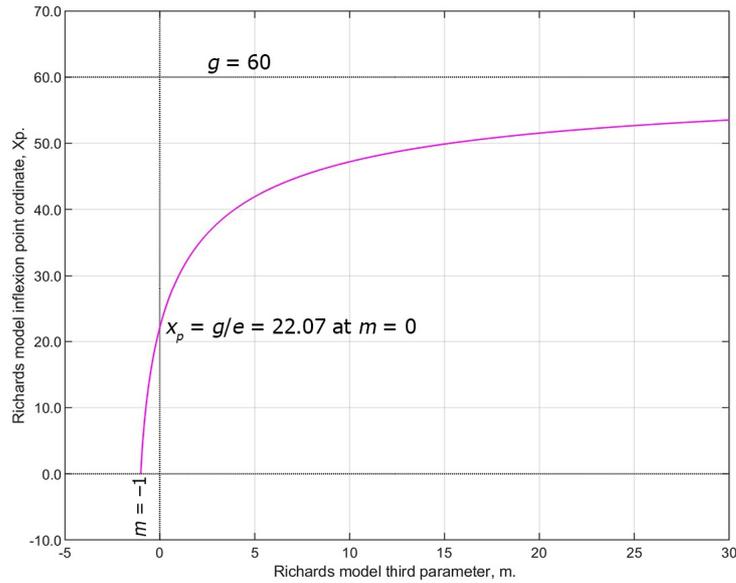
И то сказать: $k = 2$ — очень большое k ...

Значение функции в точке перегиба получаем, продифференцировав правую часть (R1) и приравняв полученное (вторую производную) к нулю:

$$x_p = \frac{g}{\sqrt[m]{1+m}} \quad (R5)$$

Как и у других ростовых кривых, ордината точки перегиба кривой Ричардса не зависит от k и x_0 . Эта ордината стремится к 0 при $m \rightarrow -1$ (то есть уходит во второй квадрант); и эта ордината стремится к g/e при $m \rightarrow 0$ (знаменатель — определение числа e); она

монотонно возрастает при возрастании m , стремясь к g при m стремящемся к бесконечности. Вот график для $g = 60$:



При $m \in (-\infty, -1)$ под знаком радикала в (R5) стоит отрицательное число, из чего можно заключить, что действительных x_p на этой полуоси нет вовсе; всё, что есть, — правее.

Но что такое исходное уравнение (R1) при $m \rightarrow 0$? Оно, в силу следствия из второго замечательного предела, превращается в уравнение Гомперца (G1):

$$\frac{dx}{dt} = kx \ln \frac{g}{x} \quad (G1)$$

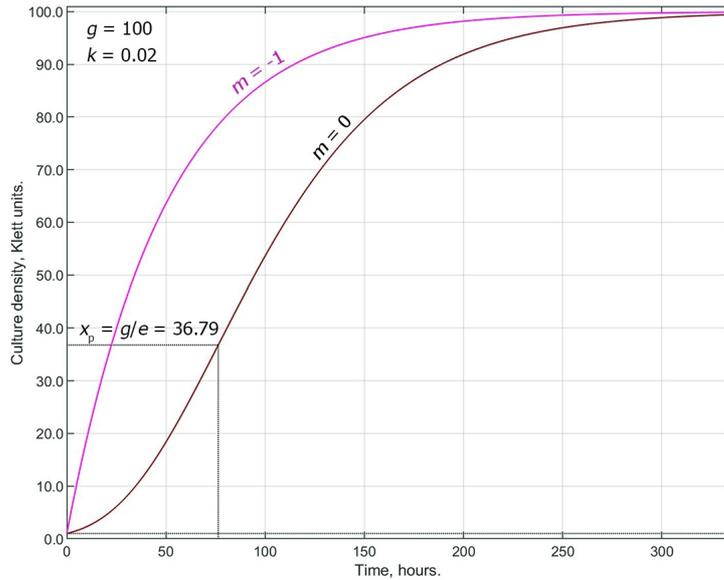
Этот предельный переход я отметил [в статье 1987 года](#); скорее всего, сам догадался, но, подозреваю, только — в ходе вычислений, не сразу. Кривая при этом остаётся вогнуто-выпуклой (сигмоидальной, S-образной).

А при $m = -1$ уравнение (R1) вырождается в такое:

$$\frac{dx}{dt} = k(g - x) \quad (R6)$$

и оно, как это совершенно ясно, даёт в первом квадранте уже только выпуклую кривую. Это видно из решения, но и без решения тоже, ведь $x_p \rightarrow 0$ в (R5) и, значит, меньше x_0 , всегда положительного.

Вот как выглядят кривые Ричардса для $m = -1$ и $m = 0$ ($x_0 = 1$, $k = 0.02$, $g = 100$):



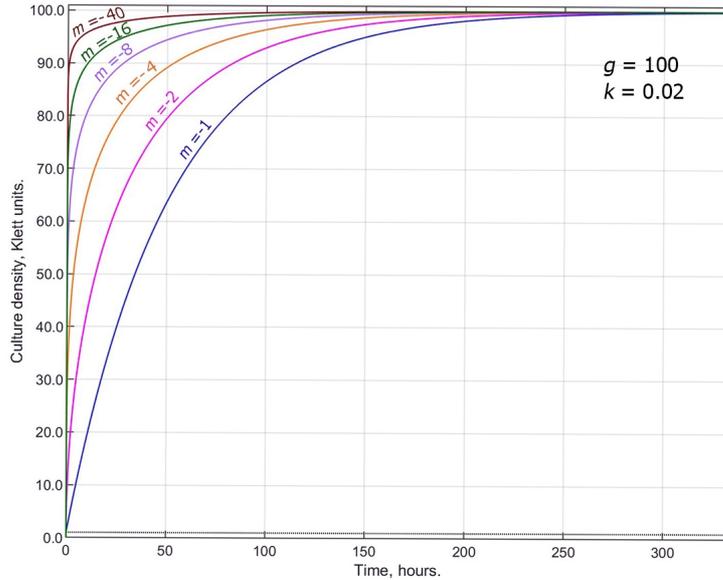
Частный случай модели Ричардса, линейное уравнение (R6), я в 1986 году бегло обсуждаю в моей учёной статейке; отмечаю, в частности, что кривая (R6) совпадает с моей кривой PWL, если точка перегиба этой последней совпадает с x_0 ; но почему-то забываю сказать, что параметр k в модели Ричардса при $m = -1$ равен произведению kb в модели PWL при $x_0 = x_p$, то есть $k_R = k_{PWL}b$.

Не только при $m = -1$, но и вообще для всех отрицательных $m \in (-\infty, -1)$ уравнение (R1) даёт в первом квадранте чисто выпуклую кривую... и, между прочим, сохраняет хоть какой-то биологический смысл, потому что экспериментальные ростовые кривые иногда оказываются чисто выпуклыми. Уравнение (R1) вообще ведёт себя при отрицательных m очень пристойно. Наглядности ради (и памяти ради... память-то меня подводит) не поленюсь и выпишу очевидное, положив $m = -n$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{kx}{m} \left(1 - \frac{x^m}{g^m} \right) = -\frac{kx}{n} \left(1 - \frac{x^{-n}}{g^{-n}} \right) = \frac{kx}{n} \left(\frac{g^n}{x^n} - 1 \right) \quad (R7)$$

(Да-да, памяти ради... хорошо ещё, что имя своё помню... Сегодня, 18 ноября 2019 года, просыпаюсь в «обычайной», как говаривал Пётр Андреевич Вяземский, бодрости и хорошем настроении, но оно тотчас портится — оттого, что я пытаюсь вспомнить *Песнь о Нибелунгах*, читаю от начала до конца, с моим *обычным* педантизмом, относительно недавно, в прошлом, вероятно, году, и вижу, что почти ничего не помню кроме чудовищной Брюнгильды...)

Вот примеры выпуклых кривых при отрицательных $m \leq -1$:



Все они исходят в первом квадранте из начальной точки $x_0 = 1$.

Абсциссу точки перегиба получаем из (R3):

$$t_p = \frac{1}{k} \ln \frac{x_p^m g^m - x_0^m}{x_0^m g^m - x_p^m} \quad (R8)$$

что, после подстановки сюда (R5), даёт выражение несколько проще:

$$t_p = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{m} \frac{g^m - x_0^m}{x_0^m} \quad (R9)$$

Итак, уравнение Ричардса, кривая Ричардса, — формализм с широким диапазоном возможностей, — ведь экспериментальные ростовые кривые капризны, иные из них имеют точку перегиба совсем близко к исходной точке, а иные и вовсе её не имеют. Недостаток же этого формализма мною уже отмечен (истина не тускнеет от повторения, как говорил Ходжа Насреддин): параметр m — не пришей кобыле хвост; нет у него никакого биологического смысла.

Естественный путь избавления от этого параметра, как уже сказано, — переход к двухпараметрическому уравнению Гомперца (G1), когда устремляем m к нулю; но тогда — прощай гибкость, прощай чисто выпуклые кривые.

Хочу проследить для памяти переход уравнения Ричардса в уравнение Гомперца, (R1) в (G1). Смешно заниматься такими пустяками, но я ведь не для благодарного человечества это делаю; я, хиломатик, графоман от математики, пишу ради удовольствия дневник задним числом. Итак, вот это следствие из второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) = \ln a, \quad \forall a > 0 \quad (P1)$$

Само следствие (P1) я шутя вывожу подстановкой $a^x = e^u$; и вообще все следствия из второго замечательного предела, сколько мне попадалось (да и сам этот предел), легко вывожу, за исключением одного следствия, которое выписываю для памяти и в назидание себе грядущему:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + a(e^{-x} - 1)\right)^{-\frac{1}{x}} = e^a \quad (\text{L2})$$

Собственно говоря, это равенство очевидное: стоит только содержимое внутренних скобок разделить и умножить на x , а $\exp(-x)$ разложить в ряд по определению числа e (по второму замечательному пределу), — ... только этот путь не кажется мне безупречно строгим: нельзя ведь как будто разбить переход к пределу на два этапа, сперва от части произвольной функции под знаком \lim , а потом от всей функции? Если можно — voila!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - ax)^{-\frac{1}{x}} = e^a \quad (\text{C1})$$

— и никаких проблем. Корректное решение, вероятно, идёт через неравенства, только я его пока не вижу... Или я не понимаю смысла chain rule? Это *цепное правило* обычно дают через производные, что сюда не идёт, но вот я нахожу и такое его определение (<https://www.symbolab.com/cheat-sheets/Limits#>):

$$\begin{aligned} &\text{if } \lim_{u \rightarrow b} f(u) = L, \text{ and } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \\ &\text{and } f(x) \text{ is continuous at } x = b \\ &\text{Then: } \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

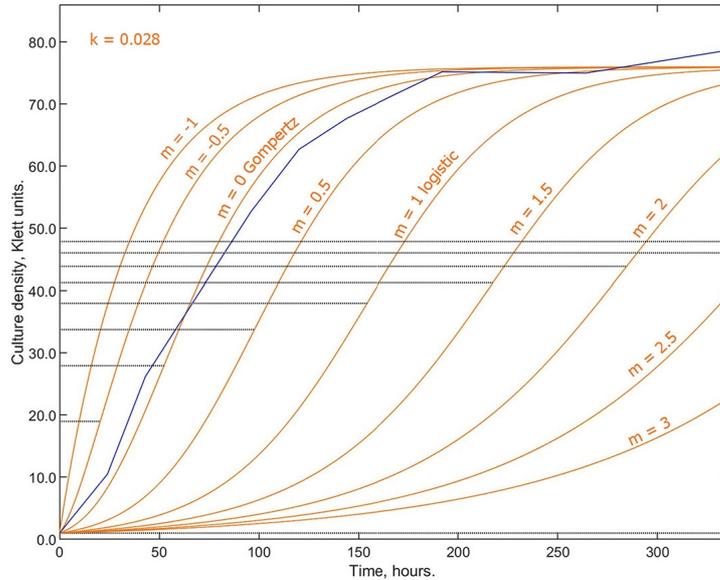
Переформулирую его для моего случая:

$$\text{If } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^a, \quad \text{and } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1, \quad \text{then } \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = e^a \quad (\text{C3})$$

Кажется, такой подход снимает мою трудность. Это — к слову...

Возвращаясь к делу. Что уравнение Ричардса сходится к уравнению Гомперца при $m \rightarrow 0$, я в 1986 году знал, как уже сказано, а вот заметил ли бы я это сейчас, без подсказки из 1986 года? Впрочем, думаю, заметил бы. Сейчас-то при мне графики, игра с ними — чистое наслаждение, времени на него я не жалею, и я просто графически набрёл бы на это свойство... а тогда — тогда я, скорее всего, набрёл на него численно...

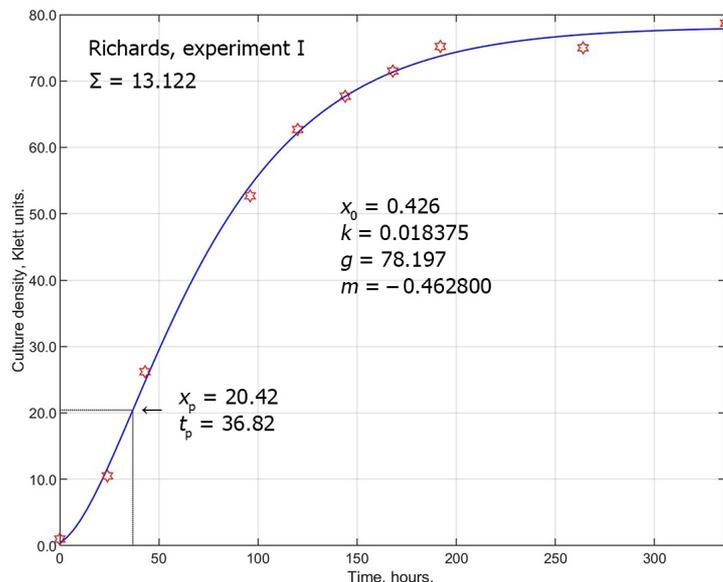
Вот как ведёт себя кривая Ричардса при фиксированных $x_0 = 1$, $k = 0.028$ и $g = 76$ и меняющемся параметре m :



Голубая ломаная линия — мой первый опыт с *дуналиеллой*, а пунктирные горизонтали тянутся к точкам перегиба кривых, за исключением самой левой ($m = -1$), где ордината $x_0 = 0$ ушла во второй квадрант.

Прилагаю, с помощью метода наименьших квадратов, кривую Ричардса к точкам первого моего опыта с *дуналиеллой*; то есть: прилагаю функцию `lsqcurvefit` с данными опыта к функции (R4). Получаю сумму наименьших квадратов $\Sigma = 13.122190$. Выходит, что кривая Ричардса разительно лучше, чем логистическая кривая и кривая Моно (для них сумма совпала и была равна 75.857465). Кривая Ричардса лучше даже, чем и кривая Гомперца (24.607996), причём выигрыш по отношению к последней достигнут как раз за счёт третьего параметра m .

Вот как этот результат выглядит графически:



Несколько неприятно, что в 1986 году я вычислил параметры этой кривой не столь тщательно, как это мне сегодня даёт MATLAB. Сумма тогда была не 13.122190, а 13.154, расхождение в три сотых. И другие параметры вышли тогда нехороши: $x_0 = 0.26$ (вместо 0.426), $k = 0.01815$ (вместо 0.018375), $g = 78.27$ (вместо 78.197), $x_p = 19.83$, $t_p = 35.92$ (вместо 36.82), $m = -0.489$ (вместо -0.4628). Но принципиальной ошибки допущено не было: итоговая сумма и тогда была наименьшей, и теперь оказалась

наименьшей среди прочих ростовых кривых... Видно, я в 1986 году так обрадовался, что сумма выходит хороша, что бросил эти утомительные подсчёты за два шага до финиша.

Второй опыт с дуналиеллой.

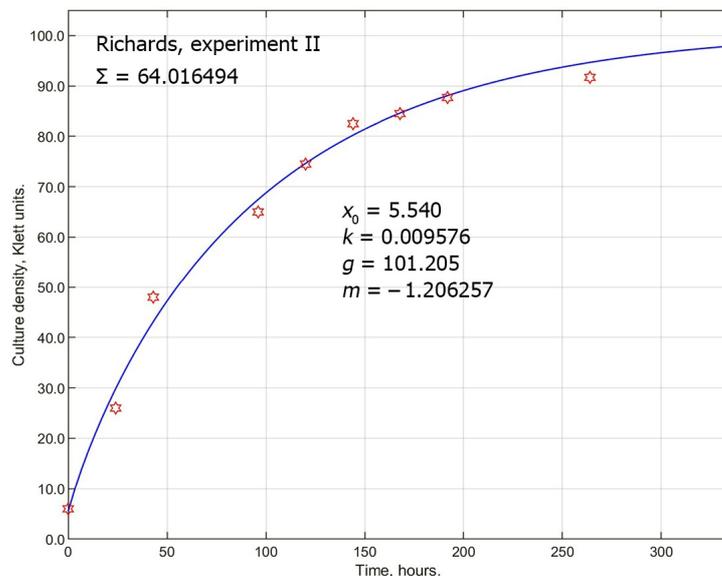
Пропускаю через lsqcurvefit уравнение Ричардса с данными моего второго опыта. Получаю неожиданное: сумма наименьших квадратов ($\Sigma = 64.016494$ при $m = -1.206257$) заметно меньше полученной в 1986 году ($\Sigma = 70.41$ при $m = -1$). Как я мог промахнуться на целых шесть единиц с гаком? А вот как: я ведь объявляю в моей статье 1987 года, что кривая Ричардса работает только для $m \in [-1, \infty)$ — и не рассматриваю случаи m меньших -1 , — те случаи, что сейчас для памяти описал выражением (R7) и следующим за ним графиком с примерами выпуклых кривых.

Очистки совести ради — поищем точку перегиба для отрицательных m (положительных n). Производная от правой части (R6) даёт постоянную $-k$ на всей оси абсцисс; то есть: для $m = -1$ точки перегиба нет. Для m меньших -1 (n больших 1) из (R5) получаем:

$$x_p = g\sqrt[1-n]{1-n} \quad (R5')$$

Прилагаем формулу Муавра и видим, что действительных корней тут нет, разве что при $n \rightarrow \infty$ выйдет $x_p = g$ (что, конечно, тоже не точка перегиба).

Итак, кривая Ричардса для второго опыта выходит у меня чисто выпуклая, без точки перегиба в первом квадранте. Вот эта выпуклая кривая для второго моего опыта с дуналиеллой:

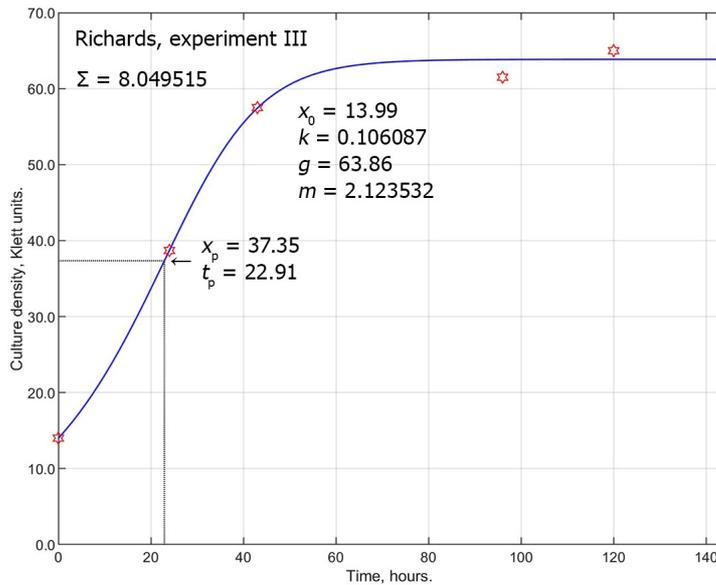


Характерно, что [в статье 1987 года](#) я привожу координаты точки перегиба кривой для второго опыта: полагаю точкой перегиба начальную точку тогдашней кривой с $m = -1$, хоть и понимаю, что при этом кривая всё равно получается чисто выпуклая.

Перехожу к третьему опыту.

Здесь тоже ошибка выходит порядочная. Сейчас с помощью lsqcurvefit получаю $\Sigma = 8.049515$ при $m = 2.123532$, а в 1986 году получил $\Sigma = 11.866$ при $m = 1.788$. Понятно, и в других параметрах расхождение чувствительное. Где моя хваленая добросовестность? Видно, устал я тогда считать.

Вот график:



Помещаю найденные параметры в сводную таблицу. Сегодня 8 января 2020.

УРАВНЕНИЕ КОЛКЕРА

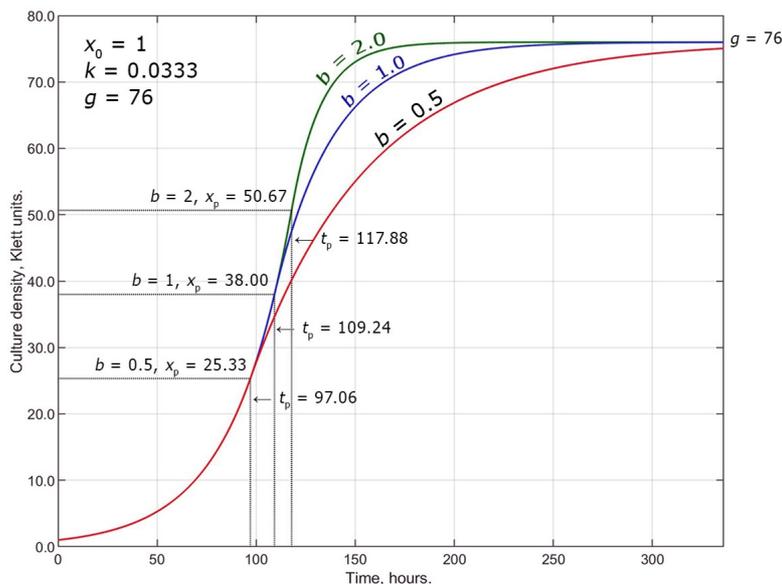
Дошла очередь до моей кусочно-линейной игрушки, до модели PWL, как я называю её в моей статье 1987 года:

$$\frac{dx}{dt} = k \min(x, b(g - x)) \quad (K1)$$

Название — PWL не самое удачное, что и говорить. Кусочно-линейна тут правая часть уравнения, а сама ростовая кривая, следующая из (K1), — вполне, как ты понимаешь, благопристойная, непрерывная, и она может быть как вогнуто-выпуклой (S-образной, сигмоидальной), так и чисто выпуклой. В этом — первое, очевидное, но пока чисто внешнее, преимущество (K1) над логистическим уравнением (L1), уравнением Гомперца (G1) и «уравнением Моно» в моей записи (M1). Только уравнение Ричардса (R1), как мы видели, способно давать чисто выпуклую ростовую кривую.

А над уравнением Ричардса (R1) уравнение (K1) имеет то преимущество, что с уравнением (K1) позволительно связать некоторый биологический смысл, ибо параметр b в нём не столь кричаще искусственный, как параметр m в (R1). Об этом скажу дальше.

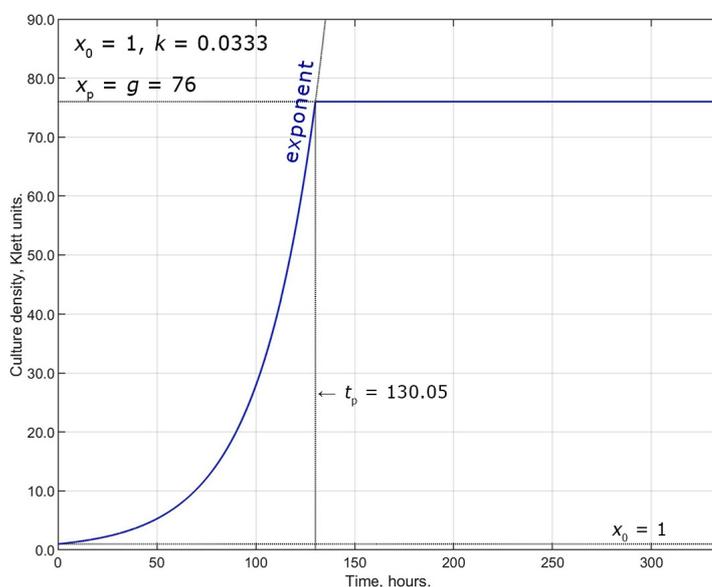
Вот моя кривая в своей вогнуто-выпуклой ипостаси для реалистических значений параметра $b = 0.5, = 1, = 2$ и реалистических же $x_0 = 1, k = 0.0333, g = 76$ на временном отрезке моего первого опыта с дуналиеллой $t \in [0, 336]$:



Здесь пунктирными линиями обозначены точки перегиба.

По-моему, прямое достоинство моей модели состоит в том, что в ней рост популяции на начальном участке совершенно не зависит (*свободен*) от третьего параметра b , параметра старения и подавления, а идёт *в точности* по мальтузианской экспоненте. В этом, кстати, моя ростовая модель выгодно отличается от всех прочих, рассмотренных и не рассмотренных. Не знаю другой, где параметр старения и подавления не включался бы в самом начале роста, пусть в разной степени.

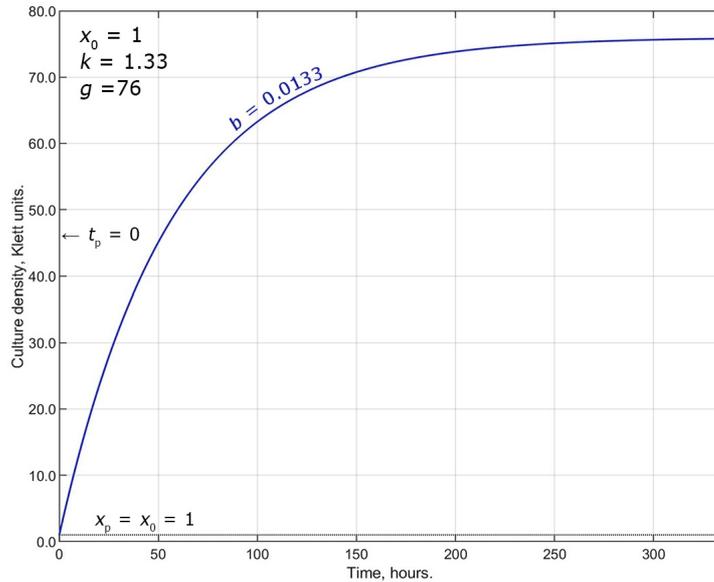
Теперь придадим параметру b значение нереалистически большое, при котором (К1) ещё не вырождается в чистую экспоненту, а всё-таки ещё даёт кривую с выходом на плато; пусть $b = 1000000$. Картинка получается презанятная:



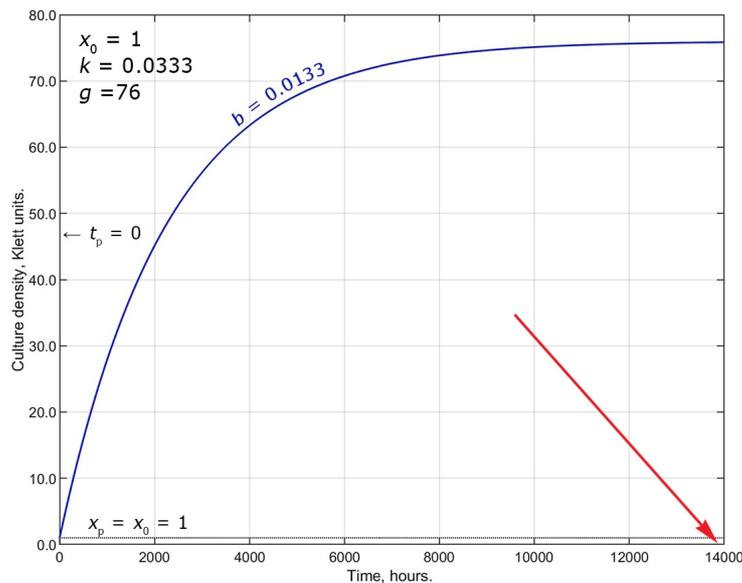
Ясно, что тут вся биология вышла вон, обидевшись. Но если b уменьшить в сто раз, то картинка получится уже не столь далёкой от тех, что получаются в иных опытах над биологическими популяциями.

Для полноты картины приведу мою кривую и в её чисто выпуклой ипостаси, когда точка перегиба есть $t_p = 0, x_p = 1$, и $b = 0.0133$ (из выражения для точки перегиба, см. (К7) ниже). Чтобы уложиться в 336 часов моего первого опыта с дуналиеллой при

столь нереалистически маленьком параметре b , здесь уже параметр k приходится подбирать нереалистически большим: $k = 1.33$:



Если же, как и в предыдущих примерах, положить $k = 0.0333$, то для получения похожей кривой в опыте с микробами придётся под опыт отвести 14000 часов, то есть 583 дня... то есть год, семь месяцев и неделю:



Как я выводил в 1986 году уравнение (K1)? Вот моя тогдашняя логика: скорость роста популяции пропорциональна количеству особей, не испытывающих нехватки в ресурсах (иначе: количеству биомассы, растущей свободно, без стеснительных обстоятельств). Математически это означает, что вместо обычного допущения о том, что скорость роста пропорциональна произведению количества биомассы на количество субстрата

$$\frac{dx}{dt} \propto x s \tag{K2}$$

я ввожу допущение о том, что скорость роста пропорциональна пересечению (дизъюнкции) количества биомассы и количества субстрата:

$$\frac{dx}{dt} \propto x \cap s \quad (\text{K3})$$

Грубо говоря: если перед особью в единицу времени имеется нужная порция жратвы, особь эту порцию сжирает и размножается (делится в случае одноклеточных); а если перед особью нет порции жратвы, особь не размножается. Пока всем особям хватает жратвы, рост — *свободный*; когда некоторым не хватает — *вынужденный*, exerted... (так [в статье 1987 года](#); сейчас бы я сказал: подавленный, depressed). Поскольку количество биомассы и количество ресурсов связаны законом сохранения $x + Ys = g$, то пересечение (дизъюнкция) достигается взятием минимума:

$$\frac{dx}{dt} = k \min(x, Ws) \quad (\text{K4})$$

где константа W имеет ту же размерность, что квазихимическая константа Y в законе сохранения, но не обязательно равна ей, ибо вбирает в себя ещё и некоторые другие характеристики существования популяции, скажем, болезни, геометрию склянки, температуру, подверженность облучению, степень загрязнения (параметр k , между прочим, тоже плодovitость и смертность организмов характеризует в конкретных условиях обитания). Обозначив $W/Y = b$, получаем (K1). Понятно, что $b > 0$.

За все эти рассуждения мне и сейчас не стыдно, но с оговорками: лучше было не употреблять слова disjunction, а сказать просто intersection; главное же, не выставлять условия $W \leq Y$, взятого неизвестно откуда и, вот ведь какой вздор, моими же последующими вычислениями вокруг моих опытов опровергнутого; их, эти вычисления, я привожу в статье... а про моё непонятное условие $W \leq Y$ — забываю.

Решение уравнения (K1) проще решений всех рассмотренных уравнений (i)–(iv)... проще пареной репы, что, конечно, преимущество, но и — в некотором роде — и недостаток, ибо в этом решении — никакой тайны, никакой изюминки, ни малейшего повода к математическому исследованию:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{kt}, & \text{at } t \leq t_p, \\ g - (g - x_p) e^{-kb(t-t_p)}, & \text{at } t \geq t_p. \end{cases} \quad (\text{K5})$$

(исправляю мою анекдотическую ошибку 1986 года против английского языка: там вместо at стояло when) где координаты точки перегиба находятся из формул

$$x_p = \frac{g}{1 + \frac{1}{b}}, \quad t_p = \frac{1}{k} \ln \frac{x_p}{x_0} = \frac{1}{k} \ln \frac{g}{x_0} \frac{b}{1 + b} \quad (\text{K6})$$

— только и всего! Как я сокрушался в 1986 году по поводу незамысловатости моей модели! Но незамысловатость эта мною тогда была преувеличена. Во второй части выражения (K5) есть милые нюансы, эта вторая часть допускает несколько возможных написаний, друг на друга непохожих; например, через ординату точки перегиба без абсциссы точки:

$$x = g - \frac{x_p}{b} \left(\frac{x_p}{b} \right)^b e^{-kbt} \quad (\text{K5}')$$

а ещё — в форме обратной функции:

$$t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{g - x_p}{g - x} \right)^{\frac{1}{b}} \frac{x_p}{x_0} \quad (\text{K5}'')$$

что непременно пригодится в дальнейшем.

Не мешает отметить, что решение (получение второй — выпуклой — части (K5)) достигается тут не примитивным разделением переменных, а двумя квадратурами: ведь вторая часть (K1) — линейное дифференциальное уравнение первого порядка общего вида. В 1985 году я, конечно, уже не автоматически решал такое уравнение. Пришлось заглянуть в учебник В. В. Степанова (1953 года издания, страница 34) и вспомнить эту азбуку. Из Степанова, стыдясь моей безграмотности (выпускник физ-меха смел забыть такое!), я выписал в мою общую тетрадь №5(1), на страницу 2, само это уравнение в общем виде

$$\frac{dx}{dt} + Px = Q \quad (S1)$$

и его общее решение

$$x = e^{-\int P dt} \left(C - \int Q e^{\int P dt} dt \right) \quad (S2)$$

Тут же у меня и уравнение Бернулли выписано с решением, и уравнение Ферхюльста-Пирла, которое я зачем-то свожу в 1985 году к (S1), хотя сейчас, в моей старости, решаю его куда как проще разделением переменных... В юности, году этак в 1966 или в 1967, я получил учебник Степанова от Гали Терновской, за которой тогда ухаживал, да так и не вернул ей книгу. Гале, впрочем, книга эта едва ли пригодилась в её последующей жизни. Получив диплом, Галя в первые годы работала чуть ли не чертёжницей... это после физ-меха! Ещё студенткой она вышла замуж за нашего общего с нею однокашника по 52-й школе и ровесника Женю Дриацкого, потом родила сына; потом тяжело заболела какой-то загадочной сердечной болезнью; потом, когда рухнул большевизм, пасла козу в Комарове, рядом с дачей мужа... Чуден мир твой, господи! ... Когда нам было по двадцать, и я ухаживал за Галей, мы гуляли по улицам и садам Ленинграда. Мы были бедны, я одевался небрежно, она — безвкусно. Мы не любили друг друга. Меня влекла к Гале детская, придуманная в возрасте девяти лет, очень литературная влюблённость; её ко мне — разве что любопытство, уж очень я был не похож на знакомое и понятное. Иногда мы ходили вместе в кино или в тогдашние заведения, называвшиеся *кафе-мороженое*, где один раз я угостил её шампанским, она же, как выяснилось, чуралась спиртного и шампанского в жизни не пила... О ресторанах у нас и мысли не могло возникнуть. Рестораны были для богатых и праздных.

Выпуклую часть (K2), ту, что вытекает из (S2), следовало бы выписать ещё и через исходные константы k , x_0 , g и b , без координат точки перегиба. В статье 1987 года я этого не сделал. Сделаю сейчас:

$$\begin{aligned} x &= g - \frac{g}{1+b} \left(\frac{g}{x_0} \frac{b}{1+b} \right)^b e^{-kbt} \\ &= g - \left(\frac{b}{x_0} \right)^b \cdot \left(\frac{g}{1+b} \right)^{b+1} \cdot e^{-kbt} \end{aligned} \quad (K5''')$$

Естественно, проку в этой записи никакого; при программировании запись (K5) удобнее, выражения для x_p и t_p вычисляются заранее и подставляются в (K5), при этом вероятность *ошибки по невнимательности*, занимающей так много места в моей жизни, резко уменьшается... Я — полный чемпион по такого рода ошибкам; но я и мазохист; как ни просты выражения (K5'''), а я сейчас десять раз терял множители и забывал

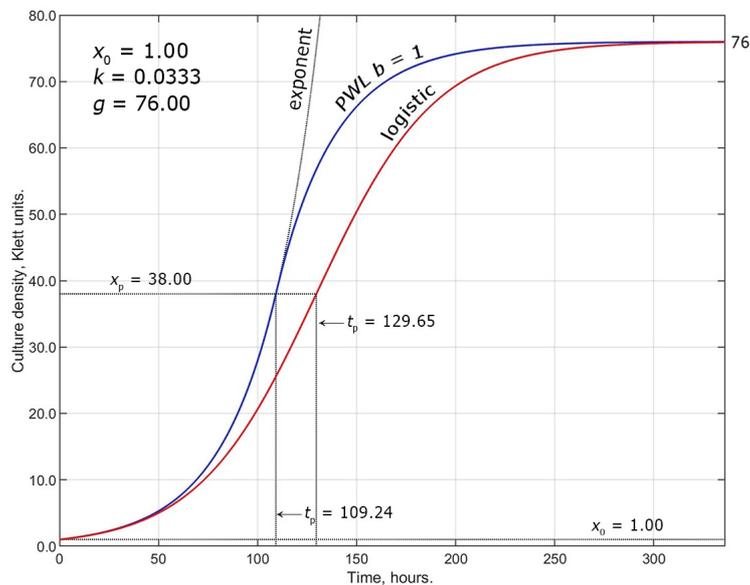
сменить знак, пока их получил, — получив же, проверил графически; к этому ведь и сводится моя теперешняя игра в бисер: к построению графиков в MATLAB'е. Сегодня 26 января 2020 года.

Как до точки перегиба, так и после этой точки уравнение (К1) линейно, стало быть оно всегда *хемостатично*, годится для хемостата не хуже логистического уравнения или уравнения Ричардса (и этим лучше уравнения Гомперца и уравнения Моно), — ведь добавление члена $-Dx$ в правую часть (К1) ничего принципиального не меняет.

В точке переключения (К6) кривой Колкера с первой её части (вогнутой) на вторую (выпуклую), — в точке перегиба (в статье 1987 года я почему-то не хотел её так назвать), — всё то же, что и в других ростовых кривых: все параметры участвуют в определении абсциссы, ордината же не зависит от параметров x_0 и k ... Между прочим, обозначения, выбранные мною в 1986 году, создают в модели PWL премилую триаду: $k-g-b$ — вот уж, что называется, нарочно не придумаешь! И угораздило же меня! ... Или всё-таки я сознательно пошутил?

Положительный параметр b может быть сколь угодно мал, даже настолько, что x_p окажется меньше x_0 . Что до ограничения сверху, то требование $x_p \leq g$ не исключает обращения b в бесконечность, вот незадача! Но тут нужно вернуться к началу и вспомнить, что при $b = \infty$ кривая (К1) вырождается в мальтузианскую экспоненту, тем самым снимая вопрос о точке перегиба. Ничего этого я не пишу там, вдали, в Заречьи... что и неплохо (мол, подразумевается!); хуже, что я и для себя, кажется, этого не продумал тогда... — «до того ль, голубка, было в мягких муравах у нас»...

При $b = 1$ (то есть при $W = Y$) уравнение (К1) становится двухпараметрическим, и ордината точки перегиба равна $g/2$, как в логистическом уравнении. Сравним кривую PWL и логистическую кривую графически. Между прочим, их как раз и следует сравнивать именно при этом условии: при совпадающей ординате точки перегиба x_p , — замечательная, по-моему, догадка, сегодняшняя, не тогдашняя. Беру, как и в прежних примерах, реалистические параметры, подсказанные моими опытами с дуналиеллой: $x_0 = 1$, $k = 0.0333$, $g = 76$ (что означает $x_p = 38$). Получаю:

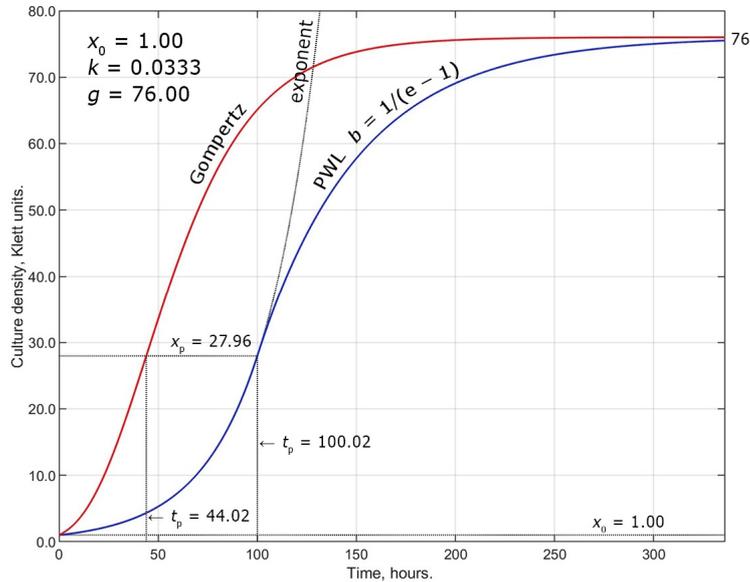


По-моему, песня, а не картинка! Всё ясно как день. Моя кривая круче логистической при $b = 1$... что, конечно, и без графика было ясно.

Теперь сравним двухпараметрическую кривую Колкера с кривой Гомперца при том же условии равенства ординаты точки перегиба. Для кривой Гомперца $x_p = g/e$, отсюда получаем

$$b = \frac{1}{e - 1} = 0.5820 \quad (\text{K7})$$

График выглядит так:



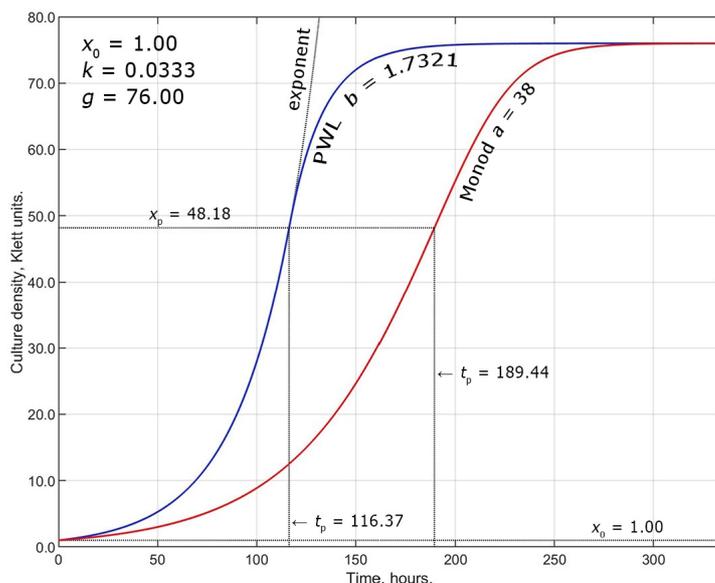
Картина обратная: при равенстве ординаты точки перегиба кривая Гомперца лежит выше (идёт к насыщению круче) кривой PWL и даже круче экспоненты, — иллюстрация того, что коэффициент k в уравнении Гомперца имеет совсем другой смысл, чем в мальтузианской экспоненте, тогда как в PWL он именно мальтузианский.

Теперь графически сравним кривую PWL (кривую Колкера) с *трёхпараметрическими* кривыми Моно и Ричардса при том же условии равенства ординаты точки перегиба. Для кривой Моно это требование выражается формулой, получающейся из (M12) и (K6):

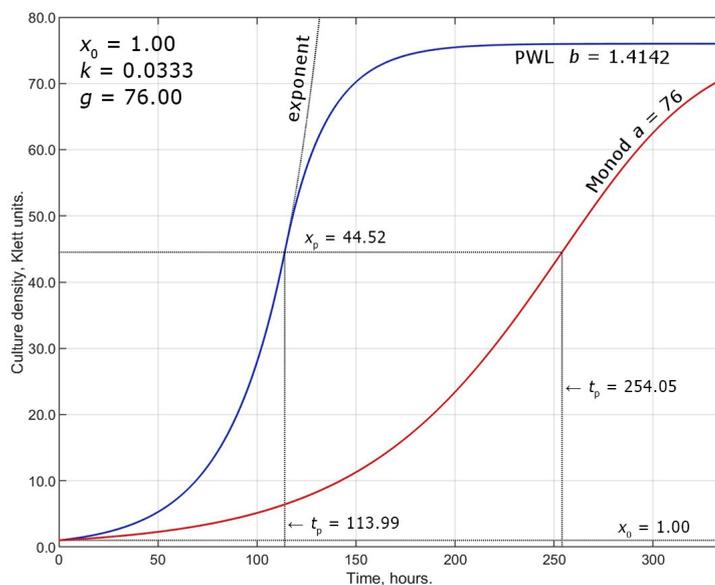
$$b = \sqrt{\frac{a + g}{a}} \quad (\text{K8})$$

где, между прочим, b оказывается подчинённым дополнительному условию $b \geq 1$, тогда как в общем случае b может быть и меньше единицы, лишь бы осталось положительным.

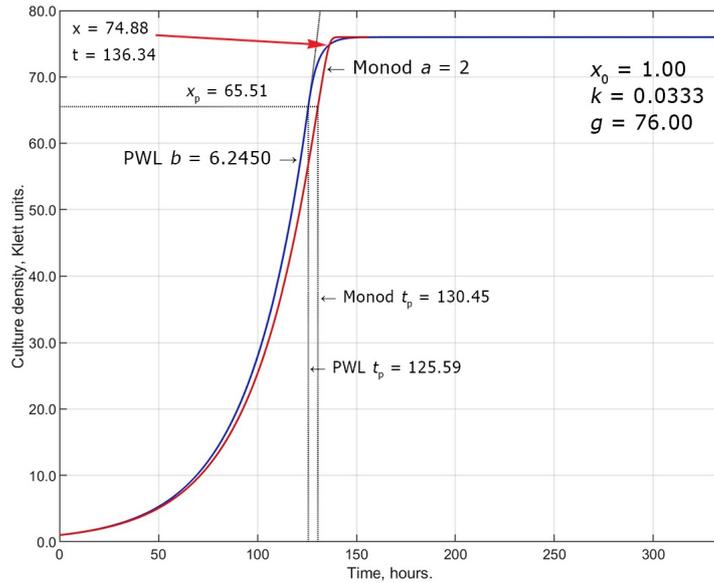
Мы видели, что, применительно к моим опытам, реалистические значения параметра a в уравнении Моно — одного порядка с числом g : они не должны быть по отношению к нему ни слишком малы, ни слишком велики. Положим, как и в прежних примерах, $x_0 = 1$, $k = 0.0333$, $g = 76$, и сначала сравним графически кривую Моно при $a = g/2 = 38$ с отвечающей ей кривой Колкера при $b = \sqrt{3} = 1.7321$ и общей для двух кривых ординатой точки перегиба $x_p = 48.18$, — всё на том же временном отрезке моего первого опыта с дуналиеллой $t \in [0, 336]$ (отмечу, что значение b получилось при этом пристойное, лежит между 0.5 и 2).



Здесь — обратная картина сравнительно с кривой Гомперца: кривая Колкера лежит выше, чем кривая Моно, поднимается круче, выходит на плато быстрее. При увеличении параметра a это свойство только усиливается. Положим $a = g$ ($b = \sqrt{2} = 1.4124$). При этом точка перегиба незначительно сдвигается вниз по оси ординат, кривая Колкера изменяется мало, а кривая Моно становится заметно более пологой (абсцисса точки перегиба резко увеличивается):



То есть кривые расходятся всё дальше и дальше. Наоборот, при уменьшении параметра a кривые сближаются, а при малых a (и, понятно, по-прежнему общей ординате точки перегиба) кривые пересекаются, — кривая Моно обгоняет кривую Колкера перед самым выходом на плато. Положим $a = 2$. Получаем:



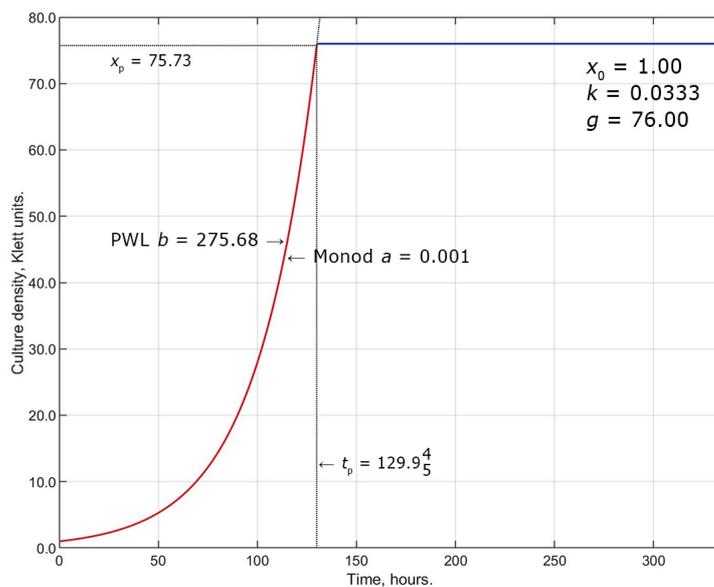
В этом конкретном примере кривые пересекаются в точке $x = 74.88$, $t = 136.34$, которую вычисляю через функцию `vpsolve` MATLAB'a:

$$\begin{aligned} & \text{syms } x \\ & f = \text{vpsolve} \left(\left(\frac{g - X_p}{g - x} \right)^{1/b} \cdot \left(\frac{X_p}{x_0} \right) = \right. \\ & \left. \left(\frac{x}{x_0} \right)^{(a+g)/g} \cdot \left(\frac{g - x_0}{g - x} \right)^{a/g}, x, [X_p \ g] \right); \end{aligned} \quad (\text{K9})$$

куда заложено требование равенства абсцисс (M4) и (K5'') в форме равенства выражений под знаками логарифмов:

$$\left(\frac{g - x_p}{g - x} \right)^{\frac{1}{b}} \frac{x}{x_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{a+g}{g}} \cdot \left(\frac{g - x_0}{g - x} \right)^{\frac{a}{g}} \quad (\text{K10})$$

Программа (K9) даёт пересечение кривых только для $a \leq 9.38$ (вычисляю с точностью до второго знака); для $a > 9.38$ пересечения нет (или функции `vpsolve` не справляется с задачей). При $a = 0.001$ графики кривой Моно и кривой Колкера практически сливаются для моего безоружного глаза:



Здесь общая ордината точки перегиба равна 75.73, абсцисса точки перегиба двух кривых отличается на одну сотую ($t_p = 129.95$ для Моно, $t_p = 129.94$ для PWL), а

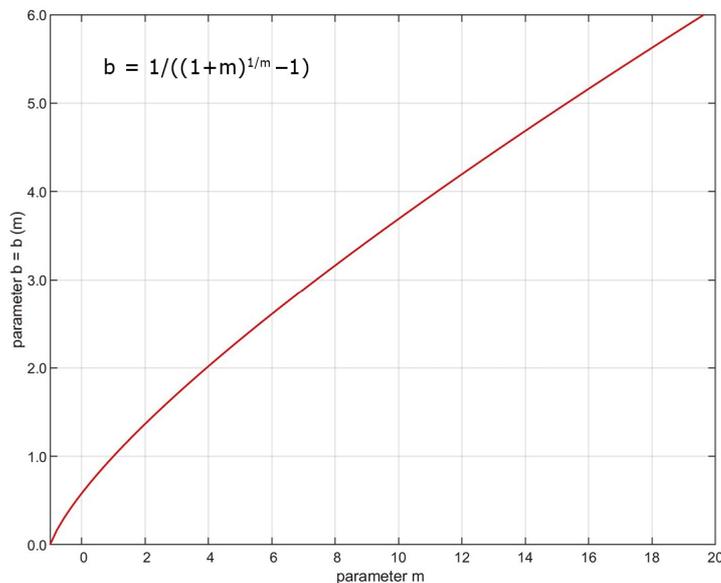
нереалистически малому значению $a = 0.001$ отвечает нереалистически большое значение $b = 275.68$. Почти не отличается от точки перегиба и точка пересечения двух кривых: $x_{\text{cross}} = 75.79$, $t_{\text{cross}} = 129.97$.

Перехожу к кривой Ричардса.

Придуманное мною требование общей ординаты точки перегиба для сравнения двух кривых — в данном случае, при сравнении кривой Ричардса с кривой Колкера, — выражается равенством:

$$b = \frac{1}{(1+m)^{1/m} - 1} \quad (\text{K11})$$

следующим из (R5) и (K6); к нему нужно добавить условие $m > -1$, вытекающее из требования положительности параметра b . Любопытства ради построим график (K11):



Затем, хоть это дело ещё более пустое, возьмём производную от (K11). Пустое это дело потому, что вряд ли у этой кривой есть экстремум в первом квадранте, да пусть бы он и был, это ничего не добавит к моей дуналиелле. Беру производную единственно из вредности характера — потому что дело это непростое, ведь функция в знаменателе (K11) — показательно-степенная, редкое неудобство, и я интуитивно угадываю забытое правило: что полная производная от знаменателя получится сложением производной от него как степенной функции с производной от него как показательной функции... Вытираю пот. Выражение для производной получаю после некоторых мучений и — «Онегин, я скрывать не стану» — не без поправки со стороны MATLAB'a, уж больно оно муторное:

$$b' = -\frac{\frac{1}{m}(m+1)^{\frac{1}{m}-1}}{((m+1)^{\frac{1}{m}} - 1)^2} + \frac{\frac{1}{m^2}(m+1)^{\frac{1}{m}} \ln(m+1)}{((m+1)^{\frac{1}{m}} - 1)^2} \quad (\text{K12})$$

Я пять раз ошибся по невнимательности при вычислении (K12), но MATLAB, спасибо ему, меня поправил; хотя и то, что он выдал,

$$-\left((m+1)^{(1/m - 1)/m} - (\log(m+1) * (m+1)^{(1/m)})/m^2 \right) / ((m+1)^{(1/m) - 1})^2$$

само по себе ещё очень нуждалось в расшифровке — и в нормальной записи (K12). Цвет скобок я добавил, чтобы вконец не запутаться.

Даже при моём помешательстве (сегодня 30 января 2020 года) было бы полным садомазохизмом исследовать поведение b' из (К12) при $m \rightarrow -1$ и $m \rightarrow \infty$ аналитически, с помощью следствий из второго замечательного предела. Исследую это поведение численно; пишу для MATLAB'a:

$$\begin{aligned} Db &= -((m+1)^{(1/m-1)/m} - (\log(m+1) \cdot (m+1)^{(1/m)})/m^2) / ((m+1)^{(1/m)} - 1)^2 \\ Db1 &= -((m+1)^{(1/m-1)/m}) / ((m+1)^{(1/m)} - 1)^2 \\ Db2 &= -(-(\log(m+1) \cdot (m+1)^{(1/m)})/m^2) / ((m+1)^{(1/m)} - 1)^2 \end{aligned}$$

(здесь Db , $Db1$ и $Db2$, суть, соответственно, производная b' (К12), её первое и её второе слагаемые). Получается, что при $m \rightarrow -1$ (когда m приближается к -1 справа), и вся производная, и её первое слагаемое $Db1$ стремятся к 1, а второе слагаемое $Db2$, естественно, стремится к нулю. Для $m \rightarrow \infty$ тем же макаром получаю сходжение к нулю производной Db (слагаемое $Db1$ при больших m остаётся положительным, слагаемое $Db2$ убывает как отрицательное); то есть (К12), скорее всего, — гипербола, а ещё вероятнее — сумма гипербол.

Помнится, я показал в этом сочинении, что кривая Ричардса жива при любых отрицательных m (даёт выпуклые кривые, подобные тем, что иногда встречаются в опытах), а параметр m начисто лишён биологического смысла, зато позволяет отнести точку перегиба за кулисы, во второй квадрант, в область комплексных чисел, и построить сколько угодно выпуклых кривых, одна выпуклее другой.

Не то с кривой PWL, где биологический смысл не похерен, и даже параметр b биологически осмысляем. Для сравнения кривой PWL с кривой Ричардса выберем наименьшее значение b из условия $x_p = x_0$, иначе говоря положим $b = x_0 / (g - x_0)$. При этом кривая Колкера делается чисто выпуклой и годится для сравнения с выпуклой же кривой Ричардса. Если держаться принятых в наших примерах значений $x_0 = 1$, $k = 0.0333$, $g = 76$, то $b = x_0 / (g - x_0)$ равно $1/75 = 0.013333(3)$, и ему отвечает минимальное значение $m = -0.9860209$, вытекающее из равенства

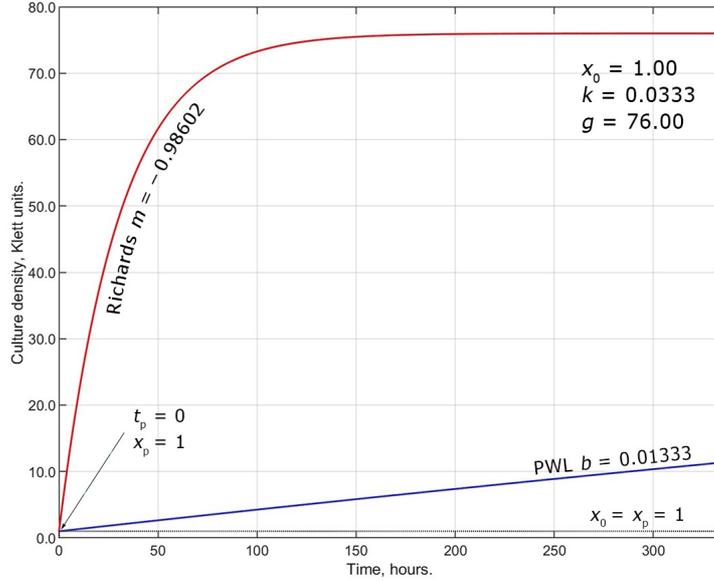
$$1 + \frac{1}{b} = 1 + \frac{g - x_0}{x_0} = \sqrt[m]{1 + m} \quad (\text{К12})$$

Уравнение (К12) я, понятно, решаю численно с помощью функции `vpsolve`:

```
syms m
f = vpsolve ( (1+m).^(1/m) == 76, m)
```

(и получаю 32 знака после десятичной точки!)

Сравним две *выпуклых* кривые графически для этой общей у них точки выпуклости $m = -0.98602$, $b = 0.01333$.



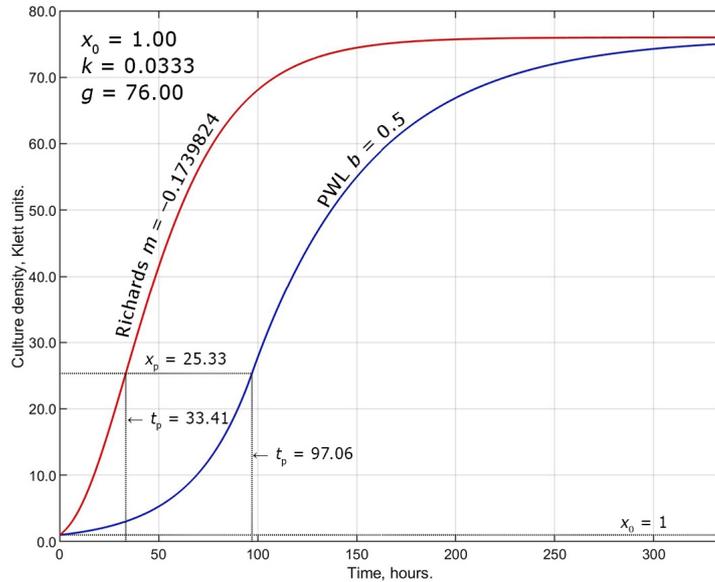
Как можно было предвидеть, кривая PWL при нереалистически малом параметре $b = 0.01333$ ведёт себя скверно: показывает нереалистически медленный рост на временном отрезке $x \in [0, 336]$, подсказанном моим первым опытом с дуналиеллой. Из графика даже того не видно, что она — чисто выпуклая. Чтобы увидеть это, нужно удлинить отрезок оси абсцисс этак раз в пять, а лучше — в десять. Наоборот, кривая Ричардса выглядит сносно, её не упрекнёшь.

Если на этом последнем графике кривую Ричардса оставить как она есть, а кривую Колкера построить при всех тех же параметрах, исключая только параметр k , который увеличить в $1/b$ раз (то есть положить $k = 2.4975$), то кривые — *сольются*, ибо они получены из вырожденных уравнений (R1) и (K1), которые отличаются друг от друга только множителем b в правой части:

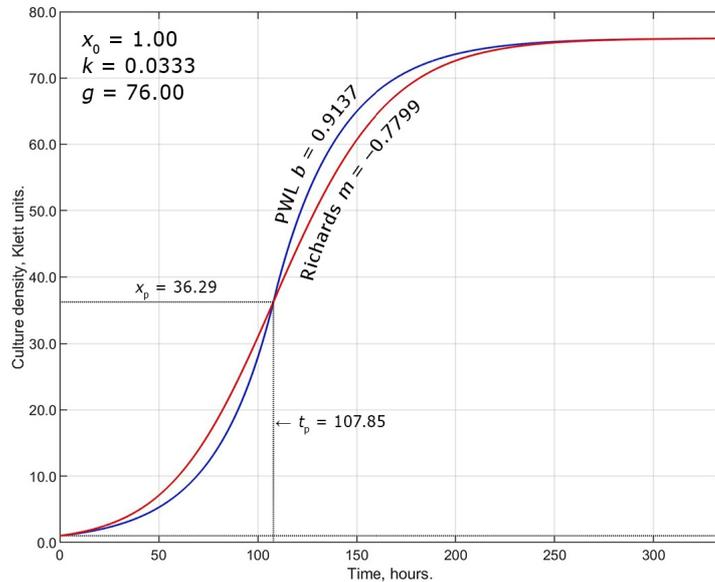
$$\frac{dx}{dt} = kb g - kb x \quad (K13)$$

$$\frac{dx}{dt} = kg - kx \quad (R6)$$

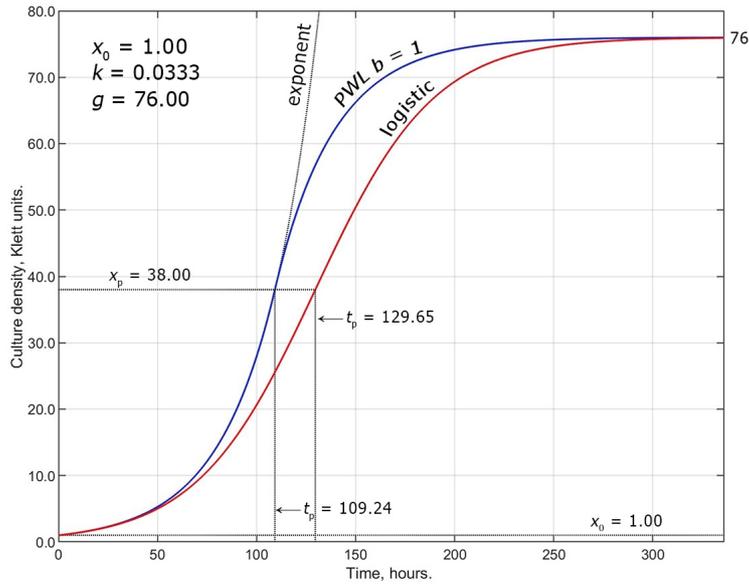
При любом $m > -0.9860209$ (и, соответственно, $b > 1/75 = 0.0133333$) обе кривые становятся выпукло-вогнутыми. Было высказано допущение, что биологически приемлемые значения параметра b лежат в интервале $b \in [0.5, 2]$. Пусть $b = 0.5$. Из (K12) получаем значение $m = -0.17398244$. Строим график:



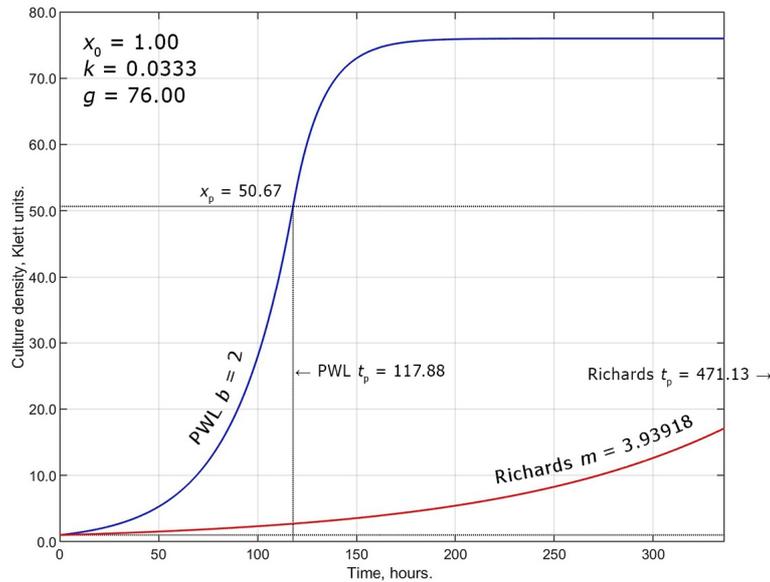
Итак, при наименьшем правдоподобном значении b кривая Колкера PWL лежит ниже (выходит на плато медленнее) соответствующей ей (по ординате точки перегиба) кривой Ричардса. При увеличении b кривая Ричардса решительно сдвигается вправо, сближаясь с кривой Колкера, у которой начальный мальтузианский участок неизменен, причём для всех $b < 1$ кривая Ричардса круче взмывает вверх от начальной точки, а затем делается более пологой, так что кривые могут пересекаться. В частности, при $m = 0.7799$ ($b = 0.9137$) кривые пересекаются в самой точке перегиба:



При $b = 1$ и соответствующем ему $m = 1$ получаем уже рассмотренное логистическое уравнение с графиком:



Наконец, для $b = 2$, которому отвечает $m = 3.9391764579771830146381966856737$ (почему бы не привести все 32 знака?) получаем график:



Тем самым всё главное, мне кажется, выяснено, и сравнение кривых Ричардса и Колкера (PWL) закончено. «Что я могу ещё сказать?» Уже и надоело, по правде говоря. Грежу заключительной главой, без формул и графиков. Но это потом. А пока —

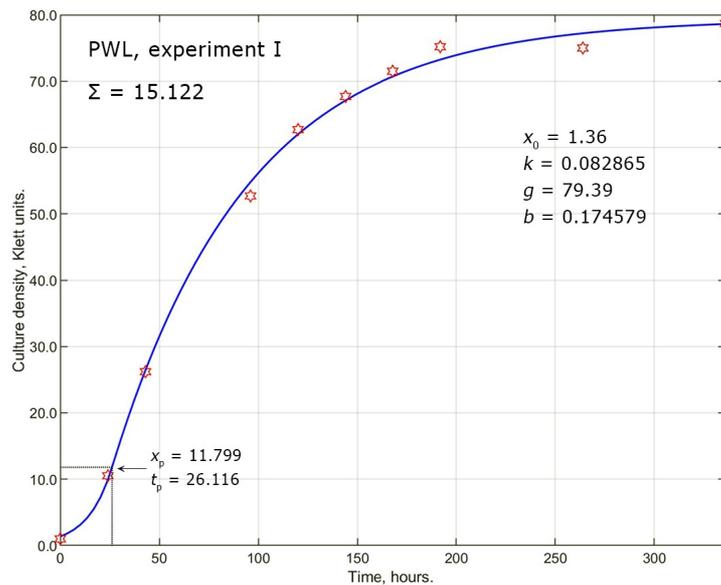
...возвращаюсь к моей покинутой дуналиелле, к моим трём робким хемостатным опытам 1986 года. Прилагаю к опытным данным метод наименьших квадратов (lsqcurvefit MATLAB). Для первого опыта получаю цифры, близкие к полученным в 1986 году (первые два столбца таблицы):

	2019-2020	1986	2020 по коэффициентам 1986
Σ	15.122112	15.145	15.152088
x_0	1.355409	1.54	←
k	0.082858	0.07745	←
g	79.386540	79.34	←

b	0.174595	0.188	←
x_p	11.800219	12.54	12.555488
t_p	26.117126	27.08	27.093292

М-да... близкие цифры; отдадим должное моей старательности в 1986 году; но они могли бы и поближе быть. Хотя — главное осталось неизменно: сумма наименьших квадратов для кривой Колкера применительно к первому опыту (15.122) много лучше сумм для логистического уравнения (75.857) и уравнения Моно (75.857), заметно лучше, чем для кривой Гомперца (24.608) и лишь незначительно хуже, чем для кривой Ричардса (13.122). Мы на втором месте из пяти возможных, мы — runners-up, так сказать. Ура.

Строю график:



В третьем столбце таблицы — цифры, полученные сегодня прямым подсчётом суммы квадратов разностей по значениям параметров 1986 года. Совпадение неплохое.

Перехожу ко второму опыту. Получаю:

	2019-2020	1986	2020 по коэффициентам 1986
Σ	70.412813	70.41	70.447711
x_0	6.637378	6.64	←
k	0.162439	0.15685	←
g	99.100169	99.10	←
b	0.069353	0.072	←
x_p	6.427185	6.64	6.655970
t_p	-0.198108	0.00	0.015316

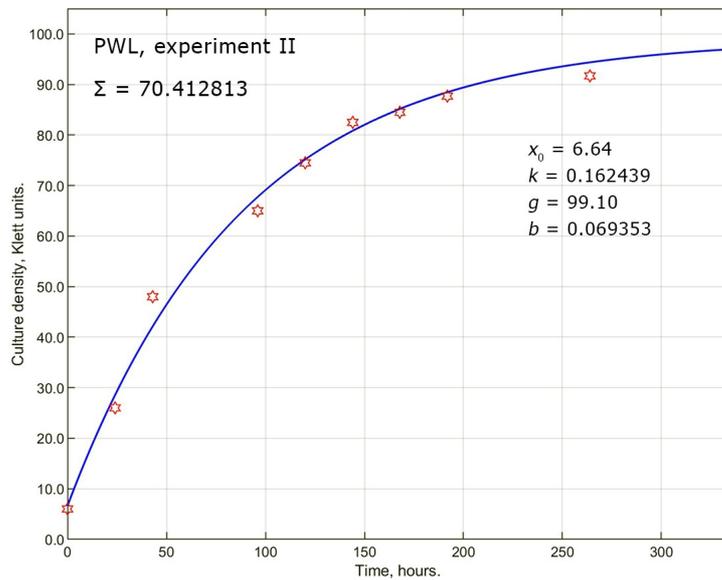
Вот новость! По сегодняшним подсчётам — точка перегиба ушла во второй квадрант: $x_p < x_0$, и t_p — отрицательно. Что кривая — чисто выпуклая, это я знал и в 1986 году, но тогда я искал параметры, исходя из условия $x_p \geq x_0$ и неотрицательности абсциссы t ; соответственно, и нашёл их для $x_p = x_0$, $t_p = 0$, — для вырожденного случая (K13). При этом я понимал, что уравнение (K13) эквивалентно, с точностью до множителя b , вырожденному случаю уравнения Ричардса (R6) для $m = -1$ (выпишу это уравнение в третий раз):

$$\frac{dx}{dt} = kg - kx \quad (R6)$$

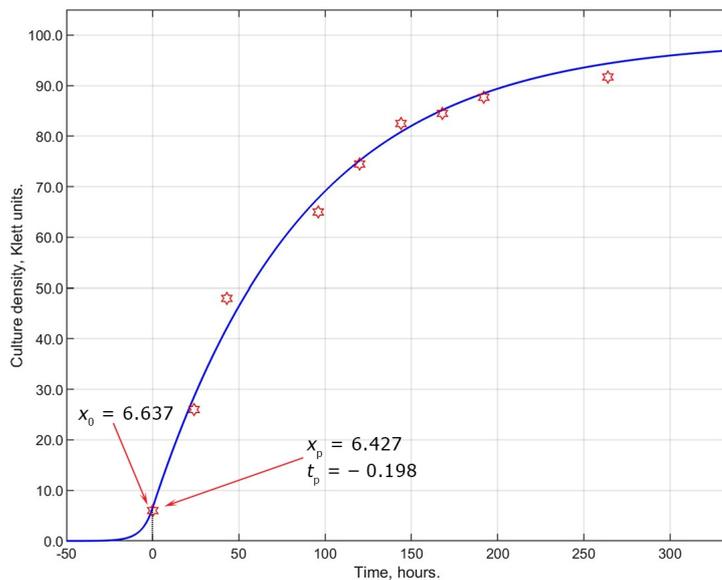
Я искал параметры именно для этого случая и, естественно, нашёл одни те же параметры $x_0 = 6.64$, $g = 99.10$, $x_p = 6.64$, $t_p = 0$ для двух кривых, одну и ту же наименьшую сумму квадратов отклонений $\Sigma = 70.41$, плюс коэффициенты $k_R = 0.01126$, $k_{PWL} = 0.15685$ и $b = 0.072$, так что немедленно получалось: $k_R = k_{PWL}b$, Ричардс и Колкер дают одно и то же. Сегодня 2 февраля 2020 года.

Проверяю сумму 70.41 прямым подсчётом по параметрам 1986 года, получаю значение несколько хуже: 70.447, а точка перегиба по этим подсчётам лежит в первом квадранте, — кривая выпукло-вогнутая! Но расхождение всё-таки пустяковое, и на графике его не разглядеть.

Строю в биологическом первом квадранте мою *сегодняшнюю* кривую PWL (правильную, новую, с точкой перегиба во втором квадранте и суммой 70.412813):



Естественно, точка перегиба тут не видна. Чтобы её увидеть, добавляю *небиологический* фрагмент отрицательной полуоси времени:



Однако и здесь, при выбранном масштабе, точка перегиба на графике практически неразличима: сливается с начальной точкой...

Понятно, что полученная для кривой PWL наименьшая сумма квадратов по точкам второго опыта (70.412813) много лучше сумм для логистической кривой, кривой Гомперца и кривой Моно (они выражаются трёхзначными числами). Что до кривой Ричардса, то [в моей статье 1987 года](#) эта сумма значится как 70.41, там кривая Колкера и кривая Ричардса совпадают (это, как уже сказано, потому так получилось, что я тогда положил $m = -1$ и не рассматривал случаи $m < -1$). Теперешний пересчёт, с помощью функции `lsqcurvefit` MATLAB'a, даёт Ричардсу выигрыш: 64.016494. Мы опять только на втором месте, какая обида! Конечно, разница незначительная, всего ничего: 6.3963... но, будь она в нашу пользу, как бы я за неё ухватился!

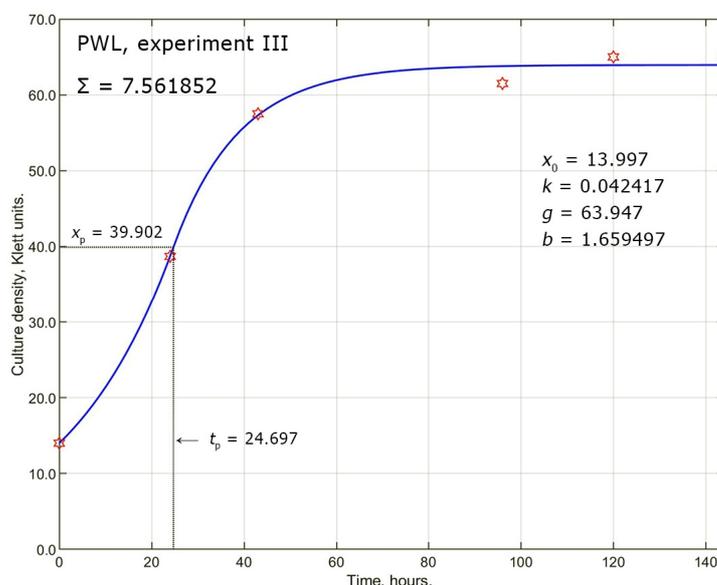
Перехожу к третьему опыту.

Получаю:

	2019-2020	1986	2020 по коэффициентам 1986
Σ	7.561852	7.5621	7.561936
x_0	13.996943	13.99	←
k	0.042417	0.04244	←
g	63.946628	63.95	←
b	1.659497	1.658	←
x_p	39.901997	39.89	39.890557
t_p	24.697268	24.69	24.688898

Совпадение тогдашних цифр с теперешними — почти идеальное. Ещё лучше, что модель Колкера тут впервые вышла на первое место, обошла четыре других модели, в том числе и нашего главного соперника, модель Ричардса.

Строю график:



Вот мы и добрались до конца, до желанного конца... Остаётся подвести итог, ведь так? Conclusion and discussion, как называют последний кусок учёной статьи.

ЧТО У НАС ПОЛУЧИЛОСЬ

Составляю итоговую таблицу, где сравниваю себя старого с собою новым.

	x_0	k	g	Third parameter	$\Sigma(x_i - x_{id})^2$	
I EXPERIMENT						
Logistic	6.40 6.406532	0.03339 0.033372	75.78 75.782589	–	75.858 75.857465	← 1986 ← 2019
Gompertz	3.16 3.146507	0.02275 0.022764	77.15 77.148882	–	24.609 24.607996	← 1986 ← 2019
Monod	7.29 6.406532	0.08915 Inf*	75.33 75.782589	164.4 Inf*	98.840 75.857465	← 1986 ← 2019
Richards	0.26 0.426144	0.01815 0.018375	78.27 78.197106	– 0.489 – 0.462800	13.154 13.122190	← 1986 ← 2019
PWL	1.54 1.355187	0.07745 0.082865	79.34 79.386591	1.88 0.174579	15.145 15.122	← 1986 ← 2019
* $k/a = \text{constant}$, $a \rightarrow \infty$, $kg/a \rightarrow 0.033372$ (logistic)						
II EXPERIMENT						
Logistic	16.97 16.993895	0.02500 0.024968	93.37 93.389847	–	315.01 315.005012	← 1986 ← 2019
Gompertz	13.23 13.217464	0.01832 0.018331	94.85 94.831722	–	191.84 191.840964	← 1986 ← 2019
Monod	17.60 17.37	0.21901 Inf*	93.40 93.25	789.2 Inf*	330.05 315.005012	← 1986 ← 2019
Richards	6.64 5.540070	0.01126 0.009576	99.10 101.205064	– 1 – 1.206257	70.41 64.016494	← 1986 ← 2019
PWL						
* $k/a = \text{constant}$, $a \rightarrow \infty$, $kg/a \rightarrow 0.024968$ (logistic)						
III EXPERIMENT						
Logistic	13.18 13.348181	0.07581 0.076173	65.01 64.134079	–	13.824 11.339163	← 1986 ← 2019
Gompertz	13.18 13.175959	0.05221 0.052220	64.55 64.548942	–	20.959 20.958850	← 1986 ← 2019
Monod	14.76	0.07010	63.73	29.59	9.684	← 1986
	13.9840	0.113832	63.8520	64.173928⁽¹⁾	8.082197⁽¹⁾	← 2019 “optimal”
	13.982543	0.113463	63.851122	63.851122	8.0839909	← 2019 $a=g$
Richards	13.96 13.988818	0.09448 0.106087	65.00 63.856301	1.788 2.12353	11.866 8.049515	← 1986 ← 2019
PWL	13.99 13.996943	0.04244 0.042417	63.95 63.946628	1.658 1.659497	7.562 7.561852	← 1986 ← 2019
⁽¹⁾ значения, полученные через «оптимальные» коэффициенты двойной гиперболы (M19); полученная при этом сумма наименьших квадратов 8.082197 чуть лучше той, что получена вслед за тем для фиксированного $a = 64.173928$ «методом динамического программирования» (8.0839909) ... а эта последняя — несколько хуже суммы 8.0839205 для $a = g$, полученной прямо, с помощью формулы (M5)... Но все три суммы — хороши! И мало отличаются одна от другой.						

Выходит вот что: модель Колкера — жизнеспособна. Это я и в 1986 году показал; это — главный вывод [моей статьи 1987 года](#); и он устоял, десятилетия его не пошатнули. Нечего и говорить, что кривая PWL (кривая Колкера) не в одном только

моём третьем опыте с дуналиеллой может оказаться лучшей сравнительно с другими. Опытных кривых — великое множество. Где-нибудь да пригодится.

Второй вывод: расчёты мои тогдашние — в большинстве случаев хороши, иногда очень хороши, и это — при тогдашних топорных методах и моей отсталости. Я себя не жалел, коэффициенты вычислял честно; учёный малый — и педант...

Третий вывод: я и сегодня вычислял старательно, не поленился. Научился в ходе этих занятий чему-то новому, главное же — многое старое вспомнил. Целых три месяца с хвостиком не скучал, от графиков — прямое наслаждение получал; и от крохотного моего движения мысли — тоже. Я с собою самим тут соревновался, и вот моё оптимистическое заключение: я сегодня не глупее меня прежнего; пожалуй, даже умнее.

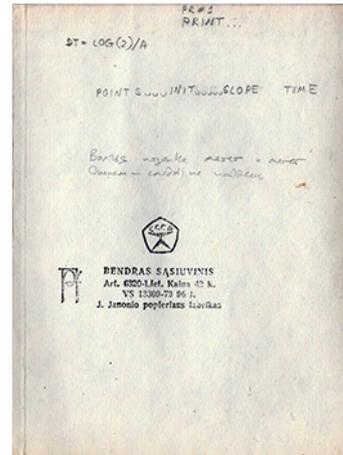
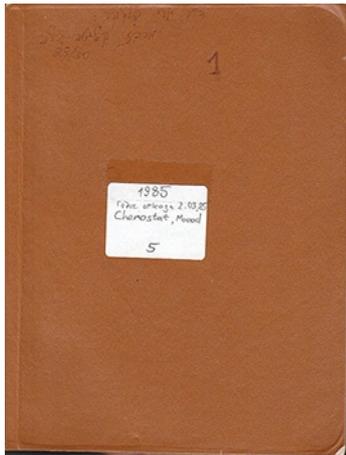
А что до недочётов, недомолвок и недодумок в моей статье 1987 года, то они, в целом, не стыдные. Не жалею времени, затраченного в старости на поправки... но при этом вполне сознаю, что сегодня мог наделать новых ошибок, — недодумки же имеются в этом внежанровом тексте наверное, тут и сомневаться нечего. Утешаюсь тем, что любую мысль можно углубить, любой текст — исправить и улучшить,

Решусь и такое сказать: этою моею сегодняшнею работой я подтвердил мой диплом, вернул себе право без стыда называться выпускником физ-меха. Пожалуй, и мою кандидатскую диссертацию подтвердил... Конечно, квалификацию, предположительно полученную мною на физ-мехе, эта работа и близко не демонстрирует; квалификация эта потребовалась тут на 10-12%. Но одну вещь мои штудии вокруг дуналиеллы, мне кажется, демонстрируют: способность мыслить независимо, самостоятельно и критически по отношению к себе и к другим.

Теперь — вывод пессимистический и тоже неновый: научного таланта я лишён, моя любовь к математике осталась неразделённой. Три месяца, с ноября 2019 года, я наблюдал сам за собою и уверился вот в чём: неумение сосредоточиться, неспособность направить мысль лазерным лучом к конкретной отграниченной цели — как раз и есть научная бездарность. Да, я могу перемножить в уме два трёхзначных числа, но игра не стоит свеч: на бумаге я сделаю это быстрее. А как раз это качество, умение считать в уме, и говорит о научной одарённости. Зря я десятилетиями презирал арифметику! Уверял себя и других, что дело не в цифрах. Чепуха! как раз с цифр-то наука и начинается...

Прощай, Дуналиелла! Прощай навсегда... Кажется, я повторяю слова императора Ираклия, горькие слова, сказанные в VII веке по другому поводу... и женское имя там другое, но тоже не к женщине относящееся: «Прощай, Сирия! Прощай навсегда!» Сирия ведь была неотъемлемой частью Византии. Эта мысль и в сознании современных греков не погасла.

Прощай и ты, тетрадка №5(1), первая моя израильская общая тетрадь, ещё советского (вильнюсского) производства, с записями 1985 года, где, впрочем, самая первая запись сделана 30 декабря 1984 года, когда я ещё в иерусалимском университете не состоял...



На задней стороне внутренней обложки читаю: *Vendras sąsiuvinis*, что означает, не подумайте дурного, общая тетрадь. Пентаэдр на этой обложке тоже не без семантики, это так называемый знак качества, к нему был привязан текст *советское значит отличное* (от общечеловеческого). Здесь же пропечатано, что цена тетрадки всегда одна и та же повсюду во вселенной: 42 копейки, мировая константа, так сказать... что в тетрадке — 96 листов, а изготовлена тетрадка на фабрике имени Юлюса Янониса... Ни мне, ни другим *русским* в советские времена не могло и в голову прийти поинтересоваться, что стоит за этим именем... да и самого имени не могли мы прочесть, не знали, что тут — имя. Все народы были равны в СССР, но некоторые — равнее других... Юлюс Янонис оказался литовским пролетарским поэтом. Он покончил с собою, бросившись под поезд в Царском Селе в 1917 году, за считанные недели до большевиков, в возрасте двадцати одного года. Википедия даёт образчик его творчества:

Поэт не жрец, курящий фимиам
И шепчущий в ночной тиши молитву,
Поэт — трубач, зовущий войско в битву,
И прежде всех идущий в битву сам.

Сколько тут правды! Какой чистый образец советского переводческого искусства! Но, конечно, мы и другую правду помним: «Не для житейского волнения, Не для корысти, не для битв, Мы рождены для вдохновения, Для звуков сладких и молитв».

Тетрадь №5(1) исписана мелким старательным почерком. Формулы, программы и цифры в ней перемежаются набросками стихов и воспоминаний. Вот страницы 48-49:

Ни одна живая душа никогда не открывала этой тетрадки, кроме меня; никто, никто на всём белом свете не видел моей каллиграфии... «никто не узнает, где могилка моя». И этой моей жалобы никто не прочтёт... Не верю, что даже ты, милая, доберёшься досюда. Вот уж поистине «песнь бескорыстная сама себе хвала»...

При защите моей дипломной работы, было это во вторник, 11 февраля 1969 года, наш заведующий кафедрой, известный в ту пору механик-теоретик, член-корреспондент АН СССР Анатолий Исаакович Лурье спросил меня:

— Удалось ли вам что-либо посчитать?

На это я ответил глупейшим образом:

— Нет. Моя работа — чисто теоретическая.

Пятёрку мне поставили, но сейчас я легко могу вообразить, как в душе усмехнулись и поморщились члены комиссии.

Моя дипломная работа, объёмом в 107 страниц, была написана (от руки) как книга или диссертация, с оглавлением, историей вопроса и списком литературы на русском и английском языках. Она была напичкана матричными формулами, но в ней не было ни одного графика. Материал излагался в форме теорем. Назывался этот труд, посвящённый управляемости и наблюдаемости, не «К вопросу о...», не «Попытка решения...» или «Применение разностных уравнений к...», а гордо и утвердительно: *Управление численностью биологической популяций*.

В 2013 году я видел могилу А. И. Лурье в Комарове, на том же кладбище (княжеском, для владетельных особ и великих людей), где и Ахматова похоронена. Тогда мне нечего было сказать покойнику, я только неловкость перед ним испытывал, но сейчас я скажу:

— Анатолий Исаакович, мне удалось кое-что посчитать!

5.02.20,
Borehamwood