МВССО РСФСР
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. М.И. КАЛИНИНА

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА „МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ"

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

УПРАВЛЕНИЕ ЧИСЛЕННОСТЬЮ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Зав. кафедрой
чл.-корр. АН СССР
профессор А.И. ЛУРЬЕ Лурье

Руководитель
д-р техн. наук
профессор Р.А. ПОЛУЭКТОВ Полуэкт
1/II-69 г

Дипломант Ю.И. КОЛКЕР Колкер

ЛЕНИНГРАД
1969

Содержание

Введение

Современность отмечена проникновением математических методов во все отрасли знания. Хорошо известны примеры использования математики и вычислительной техники в экономике. Другой областью, обнаружившей широкие перспективы приложения к ней математического аппарата, является биология и, в частности, экология, включающая в себя проблему динамики численности биологических популяций. Имеется обширная биологическая литература по этому вопросу, представляющему, очевидно, не только теоретический, но и чисто практический интерес в связи с задачами подавления и эксплуатации некоторых популяций. Биологами накоплен и частично систематизирован опыт многочисленных лабораторных и естественных наблюдений. Необходимым шагом дальнейшего обобщения статистического материала является математическое описание явлений живой природы, одновременно решающее и задачу прогнозирования биологических процессов. Именно на этот путь встала теоретическая экология последних лет. Однако первые шаги в этом направлении были сделаны уже сравнительно давно. В некотором смысле основополагающей следует считать работу V. Volterra, который построил и исследовал одну из первых биолого-математических моделей „хищник-жертва". Прежде, чем коротко остановиться на этой последней, обратимся к уравнению Verhülst'а:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \varepsilon(t)N(t) - h\,N^2(t) + I(t) - E(t) \qquad (\alpha)$$

Здесь $N(t)$ есть общая численность некоторой популяции; далее $\varepsilon(t) = a(t) - b(t)$, причем $a(t)N(t)$ и $b(t)N(t)$ есть числа особей, соответственно родившихся и умерших в интервале $[t, t+dt]$; $I(t)$ и $E(t)$ – числа особей, иммигрировавших и эмигрировавших в том же интервале времени; наконец, член $-hN^2(t)$ призван учесть ограничение роста численности популяции при больших $N(t)$. Отметим, что уравнение Ферхюльста построено путем обработки эмпирических данных. Положив в (α) $N(t)=N_1(t)$ и $\varepsilon(t)=\gamma_{11}-\gamma_{12}N_2(t)$, затем $N(t)=N_2(t)$ и $\varepsilon(t)=\gamma_{21}N_1(t)-\gamma_{22}$ и всюду $h=E=I\equiv 0$, получим систему Вольтерра:

$$\frac{dN_1}{dt}=\gamma_{11}N_1-\gamma_{12}N_1N_2$$
$$\frac{dN_2}{dt}=\gamma_{21}N_1N_2-\gamma_{22}N_2 \qquad (\beta)$$

Здесь γ_{ij} – числа.

Уравнения Вольтерра замкнуты, поскольку отсутствуют иммиграция и эмиграция, и нелинейны. Первое из уравнений (β) описывает динамику жертв, второе – хищников. Рождаемость жертв и смертность хищников пропорциональны их общим численностям N_1 и N_2. Смертность жертв тем больше, чем больше число хищников N_2; наоборот, рождаемость хищников растет при больших N_1. Решение системы (β) дает на фазовой плоскости $(N_1\ N_2)$ семейство замкнутых кривых.

Модель Вольтерра проста и не свободна от ряда существенных недостатков. В частности, в ней не учтена возрастная структура популяции и тот факт, что все особи разнятся друг от друга по некоторым важным признакам. Однако в целом она удовлетворительно описывает качественную сторону взаимодействия хищников и жертв и хорошо подтверждается наблюдениями.

Возможен другой подход к проблеме. Ряд авторов [Leslie, Kostizin, и др.] изучают динамику численности только одной популяции, при этом биоценоз, в состав которого входит популяция, наравне с прочими факторами оказывает на выбранную популяцию совокупность воздействий, имеющих смысл внешних возмущений. Простейший пример такого подхода дает (α), а также уравнение Ферхюльста-Перла, получающееся из (α) при $I=E\equiv 0$ и $\varepsilon=\mathrm{Const}(t)$:

$$\frac{dN}{dt}=\varepsilon\cdot N(t)-hN^2(t) \qquad (\gamma)$$

Уравнение (γ) замкнуто и нелинейно, а по типу совпадает с уравнением Бернулли, которое решается подстановкой $N=z^{-1}$.

Общее решение (γ) есть $N(t)=[c_0 e^{-\varepsilon\cdot t}+\frac{h}{\varepsilon}]^{-1}$, где c_0 - произвольная константа. Эта модель широко используется в демографических расчетах [см [8], Chapitre IV]. В ней, однако, не нашло отражения важное преимущество второго подхода: рассмотрение одной популяции часто позволяет учесть внутрипопуляционное разбиение особей на группы по качественным, количественным или возрастным признакам.

Настоящая работа посвящена изучению динамики общей численности популяции с учетом возрастного распределения. Большое место в ней отводится задаче управления возрастным составом популяции. Для нас существенно, что подход к этой задаче осуществляется с общих позиций теории автоматического управления. При этом многие классические представления теории (устойчивость, управляемость, наблюдаемость) приобретают особую наглядность.

Предлагаемая в данной работе математическая модель является достаточно общей. Соответствующим подбором параметров она может быть приспособлена для описания всевозможных популяций, в том числе и клеточных. Имеется ряд областей практического применения разработанных методов. Так, в рыбных хозяйствах всегда важно знать оптимальные нормы отлова; при этом существенную роль играет тот факт, что величиной ячейки рыболовной сети жестко задается распределение возрастов отлавливаемой рыбы. Далее, примером искусственной популяции может служить стадо крупного рогатого скота, в котором обычно требуется оптимальным (в смысле прибыли) образом установить равновесие между особями, участвующими в молочных и мясных заготовках. Все названные проблемы носят экономико-биологический характер. Их сложность объясняется тем, что любая взятая система всегда является только частью некоторого более общего образования, а также множеством факторов, подлежащих учету.

Возможен различный подход к построению модели динамики возрастной численности популяции. В настоящей работе мы подробно остановимся на так называемой дискретной модели.

Работа подразделяется на три главы. Первая посвящена изложению общих математических свойств модели: выводу и решению основной системы разностных уравнений и разработке методов ее исследования. Здесь же кратко рассмотрены непрерывная и дискретно-непрерывная модели. Во второй главе на основе применения критерия Калмана решается вопрос об управляемости и наблюдаемости заданной части системы управления популяцией. Глава 3 занята постановкой и решением классической в теории управления задачи автоматической стабилизации.

Глава 1 Математическая модель динамики численности биологических популяций

1. Постановка задачи

Мы отвлекаемся от изучения генетического состава биологической популяции и, таким образом, от распределения особей по всевозможным (количественным и качественным) признакам. В основу дальнейших построений положен единственно учет возрастного распределения внутри популяции. Такой подход, как мы увидим, позволит поставить и решить некоторые задачи управления общей численностью популяции; кроме того, результаты, полученные на основе такого подхода, дают возможность экстраполировать общую численность, что бывает необходимо, например, в демографических расчетах.

Необходимо отметить три известных приема математического описания популяции с учетом возрастного распределения. Модель популяции может быть дискретной (ей отвечают разностные уравнения), непрерывной (дифференциальные уравнения в частных производных) и дискретно-непрерывной (обыкновенные дифференциальные уравнения). Каждая из них устанавливает взаимно-однозначное соответствие между двумя возрастными распределениями, отвечающими двум различным моментам времени, так что знание возрастной структуры популяции в некоторый момент t_0 равносильно знанию ее в любой момент $t_a \in \Theta$, где Θ – множество значений, принимаемых аргументом t

Мы начинаем изложение выводом основной системы разностных уравнений, изучению которой в настоящей работе отводится наибольшее внимание.

2. Дискретная модель. Основная система разностных уравнений.

Примем следующее упрощающее предложение: специфические по возрастам свойства рождаемости и смертности будем считать неизменными на протяжении всего интересующего нас отрезка времени.

Пусть X есть наибольший возраст, которого достигают особи данной популяции. Разобъем интервал $[0, X]$ на n возрастных групп с периодом $T = \frac{X}{n}$ и допустим, что в некоторый момент t_0 нам полностью известно возрастное распределение особей в популяции. Это значит, что в момент t_0 нам точно известно, сколько особей содержится в рамках каждой возрастной группы. Задача состоит в нахождении возрастного распределения в момент t_0+T, затем в момент t_0+2T, и т.д. Таким образом, мы задаемся множеством Θ: мы интересуемся состоянием популяции только в дискретные моменты времени $t_0 + jT$, $j=1,2,\ldots$, равноотстоящие друг от друга. Подобный подход имеет смысл квантования по времени и с необходимостью приводит к разностным уравнениям. Подчеркнем, что единица возраста совпадает здесь с периодом квантования по времени, что, вообще говоря, не обязательно. В ряде случаев жизнь особи распадается на несколько качественно различных стадий, резко разграниченных между собой; тогда разбиение на возрастные группы диктуется самим биологическим содержанием задачи; эти группы будут иметь различную протяженность, не связанную с периодом T. Примером вида, требующего такого рассмотрения, могут служить чешуекрылые (бабочки). С другой стороны ничто не указывает на необходимость квантования по времени с переменным периодом. Можно допустить далее, что модель, предназначенная для описания большинства популяций, в том числе млекопитающих и людей, свободна от необходимости специального возрастного разбиения.

Примем еще одно упрощение: возьмем T в качестве единицы масштаба измерения времени; ясно, что эта посылка ни в коей мере не является ограничивающей и служит только для сокращения записи.

Обозначим через $x_1(k+1)$ численность всех женских особей в возрасте от 0 до 1 в момент времени $k+1$. Естественно принять это число в первом приближении пропорциональным общему числу взрослых самок в популяции в момент k, причем каждую возрастную группу необходимо взять с весом (коэффициентом пропорциональности), учитывающим плодовитость возраста и, по предположению, неизменным во времени. Предлагаемое допущение есть, по существу, линеаризация более сложной зависимости. Имеем:

$$x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) + \dots + \alpha_n x_n(k)$$

Далее, $x_j(k+1)$, $j = 2, 3, \dots, n$, есть численность женских особей в возрасте от $j-1$ до j в момент времени $k+1$. Ясно, что это будут все женские особи, находившиеся в момент k в возрастной группе от $j-2$ до $j-1$, за вычетом умерших от естественных причин в промежутке $[k, k+1)$; последние могут быть учтены выбором коэффициента пропорциональности $\beta_{j-1} \in (0,1]$; итак

$$x_j(k+1) = \beta_{j-1} x_{j-1}(k), \qquad j>1, \beta_{j-1} \in (0,1]$$

Обозначим через $\tilde{x}_p(k+1)$ численность самцов в возрасте от $p-1$ до p, $p=1,2,\dots,n$ в момент $k+1$; для розыскания этой величины прибегнем к рассуждениям, полностью аналогичным случаю вычисления $x_p(k+1)$. Выпишем все полученные соотношения:

$$\begin{aligned}
&x_1(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s x_s(k) \qquad , \alpha_s \geq 0 \\
&x_2(k+1) = \beta_1 x_1(k) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \qquad 0<\beta_j \leq 1, \ j=1,2,\dots,n-1 \\
&x_n(k+1) = \beta_{n-1} \cdot x_{n-1}(k) \\
&\tilde{x}_1(k+1) = \sum_{p=1}^{n} \gamma_p \cdot x_p(k) \quad , \ \gamma_p \geq 0 \qquad\qquad (1.1) \\
&\tilde{x}_2(k+1) = \delta_1 \cdot \tilde{x}_1(k) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \qquad 0<\delta_\ell \leq 1, \ \ell=1,2,\dots,n-1 \\
&\tilde{x}_n(k+1) = \delta_{n-1} \tilde{x}_{n-1}(k)
\end{aligned}$$

Окончательно мы имеем систему $2n$ разностных уравнений с $2n$ неизвестными. Однако можно заметить, что первые n уравнений описывают только поведение самок, тогда как в оставшиеся входят неизвестные того и другого типа. Таким образом, система уравнений женской популяции отделилась и подлежит специальному рассмотрению. Отсюда же следует важный вывод о том, что динамика мужской популяции существенно зависит от поведения самок и, следовательно, в предлагаемой модели двуполой популяции самцы играют подчиненную роль. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только первые n уравнений системы (1.1):

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= \sum_{s=1}^{n} \alpha_s x_s(k), \quad \alpha_s \geqslant 0 \\
x_2(k+1) &= \beta_1 x_1(k) \\
\ldots&\ldots\ldots\ldots \qquad 0<\beta_j \leqslant 1 \\
x_n(k+1) &= \beta_{n-1} x_{n-1}(k),
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

которые, будучи записаны в матричных обозначениях, приобретают вид

$$
x(k+1) = F \cdot x(k), \tag{1.2'}
$$

где $x(k+1)$ и $x(k)$ есть векторы-столбцы возрастных распределений популяции в моменты $k+1$ и k соответственно, а матрица

$$
F = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\
\beta_1 & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & \beta_2 & & \\
 & & & \vdots \\
\cdot & & \cdots\ \beta_{n-1} & \cdot
\end{pmatrix}; \quad 0<\beta_s \leqslant 1; \ \alpha_s \geqslant 0
$$

Это квадратная матрица размерности $n \times n$ с отличными от нуля элементами вдоль главной поддиагонали и в первой строке. Впрочем, некоторые из коэффициентов α_i могут быть и нулями: их величина определяется репродуктивными свойствами вида в каждом конкретном случае; можно указать примеры, в которых единицу возраста T целесообразно выбирать так, что один или несколько первых коэффициентов рождаемости обращаются в нуль (предрепродуктивные возрасты) или, наоборот, последние из α_i — нули (пострепродуктивные возрасты). Необходимо только, чтобы все α_i были неотрицательны. В последующих главах матрицу F и совпадающую с ней по виду матрицу A, которая вводится ниже, мы будем называть популяционной.

Применим соотношение (1.2′) к вычислению вектора $x(k+j)$, $j>1$:

$$x(k+2) = F \cdot x(k+1) = F^2 x(k)$$
$$x(k+3) = F^3 x(k)$$
и т.д.,

и вообще

$$x(k+m) = F^m x(k) \tag{1.3}$$

Видим, что для нахождения вектора возрастного распределения $x(k+m)$ в любой момент времени $s=k+m$ достаточно знать возрастное распределение в момент k и степень основной матрицы $F^{s-k} = F^m$. Более того, легко показать, что сумма элементов j-го столбца матрицы F^m есть не что иное, как число особей, привнесенных в популяцию к моменту $k+m$ одной самкой, жившей в момент k. Действительно, обозначим

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \quad x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}$$

$$F^m = \begin{pmatrix} f_{11}^m & \cdots & f_{1j}^m & \cdots & f_{1n}^m \\ \vdots & & & & \\ f_{n1}^m & \cdots & f_{nj}^m & \cdots & f_{nn}^m \end{pmatrix};$$

тогда скалярная форма равенства (1.3) примет вид:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+m) &= f_{11}^m x_1(k) + \dots + f_{1j}^m x_j(k) + \dots + f_{1n}^m x_n(k) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_p(k+m) &= f_{p1}^m \cdot x_1(k) + \dots + f_{pj}^m x_j\cdot(k) + \dots + f_{pn}^m x_n(k) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n(k+m) &= f_{n1}^m \cdot x_1(k) + \dots + f_{nj}^m x_j\cdot(k) + \dots + f_{nn}^m x_n(k)
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

Сложим почленно равенства (1.4), при этом слева мы получим общее число особей в момент $k+m$ $N(k+m) = \sum_{i=1}^{n} x_i(k+m)$, а справа

$$N(k+m) = (f_{11}^m + \dots + f_{n1}^m)\cdot x_1(k) + \dots + (f_{1j}^m + \dots + f_{nj}^m) x_j\cdot(k) + \dots + (f_{1n}^m + \dots f_{nn}^m) x_n(k)$$

Итак, общая численность женской популяции $N(k+m)$ в момент $k+m$ может быть представлена в виде суммы n групп, численность каждой из которых пропорциональна с некоторым коэффициентом количеству самок соответствующей возрастной группы в момент k, причем весовыми коэффициентами при величинах $x_j(k)$ служат как раз суммы элементов столбцов матрицы F^m.

Допустим теперь, что мы хотим управлять возрастной структурой популяции путем отбора особей в соответствующих возрастных группах. Однородная система (1.2') перейдет в неоднородную:

$$x(k+1) = F\cdot x(k) + b\, u(k)\,, \qquad (1.5)$$

где $u(k)$ - скалярное управляющее воздействие, а b - вектор управления вида $(b_1 \dots b_n)'$.

Несмотря на то, что в задачах автоматического управления, к которым должна подвести настоящая глава, как правило, не возникает необходимости в решении системы (1.5), последнее, однако, часто облегчает построение качественных выводов и понимание сущности протекающих в системе процессов. Поэтому мы коротко остановимся на этом вопросе.

Решение неоднородной системы (1.5) складывается из общего решения однородной системы (1.2′) и некоторого частного решения (1.5), т.е на случай системы разностных уравнений полностью переносится теория, развитая для дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, которым аналогична запись (1.5). Существенным отличием от непрерывного случая является то, что любая система разностных уравнений служит одновременно и рекуррентным соотношением; поэтому (1.2′), например, эквивалентна системе

$$x(k) = F^{k} x(0) \qquad (1.2'')$$

где $x(0)$ есть известное начальное возрастное распределение; вместе с тем (1.2″) можно рассматривать как сокращенную запись общего решения (1.2′).

Частное решение (1.5) может быть легко получено методом Лагранжа:

$$x^{*}(k) = F^{k} \sum_{j=0}^{k-1} F^{-j-1} \cdot b \cdot u(j)$$

Общее решение (1.5) имеет вид

$$x(k) = F^{k} \cdot x(0) + F^{k} \sum_{j=1}^{k} F^{-j} \cdot b \cdot u(j-1)$$

Конструктивный подход к нахождению общего решения неоднородной системы (1.5) связан со свойствами характеристического уравнения для основной матрицы F

$$|F - I\mu| = 0 ,$$

которое исследуется ниже.

3. Непрерывная и дискретно-непрерывная модели.

Рассмотрим теперь случай, когда значения времени t и возраста x заполняют непрерывно некоторые отрезки соответствующих положительных полуосей. Пусть численность изучаемой популяции $n(t)$ настолько велика, что в результате некоторой аппроксимации без существенной потери точности она может быть представлена в виде непрерывной функции времени, причем такой, что

$$n(t) = \int_0^X u(x,t)\,dx \qquad (\diamond)$$

где X – наибольший возраст, которого достигают особи данной популяции, а $u(x,t)$ – некоторая функция, для которой $(\diamond)$ служит определением. Из $(\diamond)$ видно, что $u(x,t)$ является в известном смысле аналогом функции плотности вероятности.

Произвольным образом разобьем интервал $[0, X]$ на n отрезков посредством точек

$$0 = x_1 , \ x_2 , \ x_3 , \ \dots , \ x_n = X \ ;$$

обозначим $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ и $T = \max\limits_i \Delta_i$.

Подобно $(\diamond)$ определим численность особей в возрасте от x_{i-1} до x_i в момент τ так:

$$n_i(\tau) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u(x,\tau)\,dx$$

С другой стороны первое из уравнений (1.2) дает:

$$n_1(t+T) = \sum_{i=1}^{n} d_i\, n_i(t) \qquad (\overset{\diamond}{\diamond})$$

Коэффициенты d_i здесь, как и прежде, есть вещественные неотрицательные числа, зависящие от Δ_i и в общем случае не совпадающие с коэффициентами рождаемости в n°1.

Пусть $u(x,t)$ непрерывна в интервале $[0,X]$; тогда согласно теореме о среднем в $[0,X]$ найдутся n точек ξ_s таких, что

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u(x,\tau)\,dx = u(\xi_i,\tau)\,\Delta_i$$

и $$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$

Перепишем $(\overset{\diamond}{\diamond})$ с учетом теоремы о среднем

$$u(\xi_1, t+T)\cdot\Delta_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i\, u(\xi_i, t)\cdot\Delta_i$$

Из общих соображений ясно, что величины Δ_1 и d_i имеют один порядок малости, поэтому разделив последнее равенство на Δ_1 и переходя к пределу при $T\to 0$, найдем

$$u(0,t) = \int\limits_0^X b(x)\, u(x,t)\,dx$$

где $$b(x) = \lim_{T\to 0} \frac{d_i}{\Delta_1}$$

Рассмотрим оставшиеся $n-1$ уравнений системы (1.2);

возьмем любое из них, например i-е, в виде

$$n_i(t+T)=\beta_{i-1}\,n_{i-1}(t)=n_{i-1}(t)-d_{i-1}\cdot n_{i-1}(t)$$

Здесь величина $d_{i-1}\geq 0$ имеет при $T\to 0$ один порядок малости с T. Положим $\Delta_i=\Delta_{i-1}=\Delta$, $i=1,2,\dots,n$ и воспользуемся теоремой о среднем, тогда

$$u(\xi_i,t+T)\Delta-u(\xi_{i-1},t)\Delta=-d_{i-1}\cdot u(\xi_{i-1},t)\,\Delta$$

Далее, найдется такое θ, $0\leq\theta\leq 2T$, что $\xi_i=\xi_{i-1}+\theta$; Разложим $u(\xi_{i-1}+\theta,t+T)$ в ряд Тейлора по первому аргументу около точки ξ_{i-1}, поделим обе части последнего равенства на ΔT и перейдем к пределу при $T\to 0$:

$$\lim_{T\to 0}\left\{\frac{u(\xi_{i-1},t+T)-u(\xi_{i-1},t)}{T}+\frac{\left.\frac{\partial u(x,t+T)}{\partial x}\right|_{x=\xi_{i-1}}\cdot\theta}{T}+\dots\right\}=$$

$$=-\lim_{T\to 0}\frac{d_{i-1}}{T}\cdot u(\xi_{i-1},t)$$

Предел $\lim_{T\to 0}\frac{\theta}{T}=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\xi_{i-1}}=1$, т.к. возраст x есть, очевидно, $t-t_0$; итак

$$\frac{\partial u(\xi_{i-1},t)}{\partial t}+\frac{\partial u(\xi_{i-1},t)}{\partial\xi_{i-1}}=-d(\xi_{i-1},t)\cdot u(\xi_{i-1},t)$$

причем слева стоит полная производная $u(\xi_{i-1},t)$ по времени. Поскольку точка ξ_{i-1} — любая в интервале $[0,X]$, то окончательно

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=-d(x)\,u(x,t)$$

Полученные два уравнения необходимо дополнить заданием функции начального возрастного распределения

$$u(x,0)=g(x)$$

Таким образом динамика популяции в непрерывном случае описывается следующими тремя соотношениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -d(x)\,u$$

$$u(0,t) = \int_0^\infty b(x)\, u(x,t)\,dx$$

$$u(x,0) = g(x),$$

причем здесь использовано равенство $u(x,t) \equiv 0$ для $\forall x > X$. Общее решение первого уравнения есть

$$\Omega(t-x)\, e^{-\int_0^x d(s)\,ds}$$

где $\Omega(t-x)$ произвольная функция разности $t-x$; она находится подстановкой общего решения в выражения для $u(0,t)$ и $u(x,0)$.

Формальное решение

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} e^{pt}\frac{F(p)}{1-K(p)}\,dp$$

$$\text{где}\quad F(p) \risingdotseq \int_t^\infty K(x)\,\Omega(t-x)\,dx$$

$$\text{и}\quad K(p) \risingdotseq K(x) = b(x)\,e^{-\int_0^x d(s)\,ds}$$

сводит задачу нахождения $\Omega(t)$ к процедуре отыскания корней уравнения

$$\int_0^\infty b(x)\,e^{-px-\int_0^x d(s)\,ds}\,dx = 1$$

Всякое внешнее по отношению к популяции воздействие (в том числе и управление) может быть учтено введением в правой части уравнения с частными производными слагаемого $v(x,t)$. Мы приходим к неоднородной задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -d(x)\,u(x,t) + v(x,t)$$

$$u(0,t) = \int_0^\infty b(x)\,u(x,t)\,dx$$

$$u(x,0) = g(x)$$

Методом вариации постоянной легко находится частное решение первого уравнения:

$$u^*(x,t) = e^{-\int_0^x d(s)ds} \int_0^x e^{\int_0^s d(\xi)d\xi}\, v[s,\, t-x+s]\, ds$$

Общее решение примет вид:

$$u(x,t) = e^{-\int_0^x d(s)ds} \left\{ \Omega(t-x) + \int_0^x e^{\int_0^s d(\xi)d\xi}\, v[s, t-x+s]\, ds \right\}$$

Способ нахождения $\Omega(t-x)$ в однородном и в неоднородном случаях полностью совпадают.

Для получения системы уравнений дискретно-непрерывной модели воспользуемся другой формой записи теоремы о среднем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\xi_i} = \frac{u(x_i,t) - u(x_{i-1},t)}{x_i - x_{i-1}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta_i} \;;$$

здесь x_i – точки разбиения промежутка $[0, X]$ на конечные интервалы Δ_i, $i=1,2,\ldots,n$, а $u(x_i,t)$ – плотность численности особей возраста x_i в момент t, введенная для непрерывной модели. Имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=\xi_i} + \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta_i} = -d(\xi_i)\,u(\xi_i,t)$$

Пусть теперь Δ_i – малы; положим $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=\xi_i} = \frac{du_i}{dt}$ и $u(\xi_i,t) = u_{i-1}$

а $d(\xi_i)$ обозначим через d_{i-1}; мы получим n обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение теоремы о среднем в интегральной форме дает:

$$u_0 = \int\limits_0^X b(x)\, u(x,t) = \sum_{p=1}^{n} b(\xi_p)\cdot\Delta_p\cdot u(\xi_p,t)$$

или, с принятием допущения о малости Δ_i,

$$u_0 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n$$

где $\quad b_p = \Delta_p\cdot b(\xi_p).$

К системе n дифференциальных уравнений присоединим полученное алгебраическое соотношение:

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{u_1}{\Delta_1} + \left(\frac{1}{\Delta_1} - d_0\right)u_0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{du_n}{dt} = -\frac{u_n}{\Delta_n} + \left(\frac{1}{\Delta_n} - d_{n-1}\right)\cdot u_{n-1}$$

$$u_0 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$$

Продифференцируем последнее уравнение и подставим в него первые n уравнений; тогда

$$\dot u_0 = c_0 u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$$

$$\dot u_1 = a_0 u_0 + b_1 u_1$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot u_n = a_{n-1} u_{n-1} + b_1 u_n,$$

или

$$\dot u = M u \qquad (\nabla)$$

Окончательно мы получили нормальную систему $n+1$ линейных дифференциальных уравнений; $\dot u(t)$ и $u(t)$ суть $n+1$-мерные векторы, а матрица

$$M = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & & c_n \\ a_0 & b_1 & & & \cdot \\ \cdot & a_1 & b_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{n-1}\, b_n \end{pmatrix}$$

Формальное общее решение (∇) может быть записано так

$$u(t) = e^{Mt} \cdot u(0)$$

Как и в случае системы разностных уравнений, вопрос о построении конструктивного общего решения сводится к исследованию характеристического уравнения

$$|M - I\lambda| = 0$$

Сравнительно сложный вид матрицы M, а также некоторые другие соображения, заставляют отказаться от дискретно-непрерывной модели в пользу двух предыдущих.

4. Характеристическое уравнение дискретной системы

Вернемся к системе (1.2′). Решение ее будем искать в виде $x(k) = h\mu^k$, где μ – неизвестное основание а h – вектор неопределенных коэффициентов. Имеем

$$(F - I\mu)h \cdot \mu^k = 0$$

Нас интересует, очевидно, решение, отличное от тривиального, поэтому

$$(F - I\mu)h = 0$$

Полученная система n алгебраических уравнений обладает ненулевым решением относительно вектора h тогда и только тогда, когда

$$|F - I\mu| = 0 \qquad (6)$$

Необходимо написать это уравнение в явной форме.

<u>α. Характеристический многочлен матрицы</u>

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \beta_{n-1} & \cdot \end{pmatrix}$$

<u>есть $\Delta_n = |F - I\mu| = (-1)^n \mu^n - (-1)^n \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \mu^{n-s} \prod_{t=1}^{s-1} \beta_t$</u>

<u>Доказательство.</u> Непосредственной проверкой убеждаемся, что предложение верно для $n = 1, 2$.

Пусть теперь оно верно для матрицы порядка $n-1$, т.е

$$\Delta_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \mu^{n-1} - (-1)^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s \mu^{n-s-1} \prod_{t=1}^{s-1} \beta_t \; , \; n > 2$$

Разложим определитель Δ_n по элементам последней строки:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \mu & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & -\mu & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdots & \beta_{n-1} \; -\mu \end{vmatrix} =$$

$$= -\mu \cdot \Delta_{n-1} - (-1)^{2n-1} \cdot \beta_{n-1} \begin{vmatrix} \alpha_1 - \mu & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_n \\ \beta_1 & \cdots & & \cdot \\ \cdot & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdots & -\mu & \cdot \\ \cdot & \cdots & \beta_{n-2} & \cdot \end{vmatrix} =$$

$$= -\mu \cdot \Delta_{n-1} - \beta_{n-1} \cdot (-1)^n \cdot \alpha_n \cdot \beta_1 \cdots \beta_{n-2} =$$

$$= (-1)^n \left\{ \mu^n - \alpha_1 \mu^{n-1} - \alpha_2 \beta_1 \mu^{n-2} - \ldots - \alpha_{n-1} \beta_{n-2} \cdots \beta_1 \mu - \alpha_n \beta_{n-1} \cdots \beta_1 \right\} =$$

$$= (-1)^n \left[\mu^n - \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \mu^{n-s} \prod_{t=1}^{s-1} \beta_t \right]$$

Часто требуется другая запись характеристического многочлена, именно

$$|I\mu - F| = \mu^n - \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \mu^{n-s} \prod_{t=1}^{s-1} \beta_t$$

Характеристическое уравнение (6) примет вид

$$\mu^n - \alpha_1 \mu^{n-1} - \alpha_2 \beta_1 \mu^{n-2} - \ldots - \alpha_n \beta_{n-1} \cdots \beta_1 = 0 \qquad (1.6')$$

Решение (1.6′) дает n собственных значений матрицы F $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, среди которых, вообще говоря, могут быть и кратные. Однако F, как и всякая неотрицательная матрица, имеет неотрицательное характеристическое число, по модулю превосходящее все другие [см. [3], Теорема 3, стр. 365]. В нашем случае, как видно из (1.6′), это число положительно, если $\alpha_n \neq 0, \ldots, \alpha_1 \neq 0$, причем достаточно выполнения хотя бы одного из этих условий. Мы исключаем из рассмотрения случай, когда все $\alpha_i = 0$: он не имеет под собой биологической основы. Итак, матрица F всегда располагает положительным и наибольшим по модулю собственным числом, при этом ему соответствует положительный же собственный вектор.

5. Вырождение дискретной системы.

При отыскании решения системы разностных уравнений вида (1.2′) обычно специального рассмотрения требует присутствие нулевого корня. В данном случае этого можно избежать.

Нулевой корень кратности p, согласно полученному в $n^\circ 4$. характеристическому уравнению, возможен тогда и только тогда, когда

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_{n-p-1} = 0 ,$$

что приводит к вырождению n-мерной системы в $n-p$-мерную, которая, по предположению, уже не содержит нулевых корней. Действительно, матрица F примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\alpha_1 & \dots & \alpha_{n-p} & \cdot & \dots & \cdot \\
\beta_1 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
\dots & \dots & \dots & & \dots & \cdot \\
 & \beta_{n-p-1} & \cdot & & \dots & \\
\hline
 & \dots & \beta_{n-p} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\cdot & \dots & & & \dots & \beta_{n-1} \ \cdot
\end{array}\right)$$

и, таким образом, система (1.2)

$$x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) + \dots + \alpha_{n-p} x_{n-p}(k)$$
$$x_2(k+1) = \beta_1 x_1(k)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-p}(k+1) = \beta_{n-p-1} x_{n-p-1}(k)$$

$$x_{n-p+1}(k+1) = \beta_{n-p} x_{n-p}(k)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n(k+1) = \beta_{n-1} x_{n-1}(k)$$

распадается на две, причем вторая определена для $\forall s \geq k+1$, если известно решение первой. Начальное значение

$$x^{II} = [x_{n-p+1}(k), \ldots, x_n(k)]'$$

восстановить не удается.

Напомним, какой биологический смысл несет в себе факт вырождения системы; если $d_i = 0$ при $i = n-p+1, \ldots, n$, то среди особей возрастной группы от $n-p-1$ до $n-p$ репродукция наблюдается, а во всех последующих размножения нет.

Матрицу исходной системы представим в виде:

$$F = \begin{bmatrix} A & \cdot \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Здесь матрица A квадратная размерности $n-p \times n-p$ и по форме совпадает с невырожденной популяционной матрицей; C имеет размерность $p \times n-p$ и только один отличный от нуля элемент в правом верхнем углу; D – квадратная $p \times p$-матрица с ненулевыми элементами вдоль главной поддиагонали. Любая степень F^m матрицы F в форме $(*)$ имеет вид

$$F^m = \begin{bmatrix} A^m & \cdot \\ f[A, C, D] & D^m \end{bmatrix}$$

Рассмотрим степень D^m; в этой матрице все элементы – нули, кроме расположенных на поддиагонали, начинающейся $m+1$-м элементом первого столбца; именно:

$$D^m = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \beta_{n-p+1} \cdots \beta_{n-p+m} & & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdot & \cdots & \beta_{n-m} \cdots \beta_{n-1} & \cdots & \cdot \end{bmatrix}$$

Этот результат легко доказывается методом индукции. Степень D_{n-1}^{p-1} имеет, очевидно, только один ненулевой элемент $\prod\limits_{n-p+1} \beta_s$ в левом нижнем углу, а степень $D^p = 0$. Итак, у матрицы F^m, $m \geq p$, последние p столбцов состоят из нулей. Это есть просто выражение того очевидного факта, что особи, принадлежащие пострепродуктивным возрастам к моменту времени k, отсутствуют в популяции после своей смерти в момент $k+p$.

Принципиальный интерес представляет популяционная матрица A; в частном случае $\alpha_n \neq 0$ она совпадает с F: $A=F$; поэтому в последующем математическом обсуждении наше внимание сосредоточится почти полностью на матрице A и на возрастном распределении, ограниченном предрепродуктивными и репродуктивными возрастами.

Матрица A невырожденная. Действительно:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-p} \\ \beta_1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdots & \beta_{n-p-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-p+1} \cdot \alpha_{n-p} \prod_{s=1}^{n-p-1} \beta_s ,$$

а по предположению $\alpha_{n-p} > 0$; поэтому $|A| \neq 0$. Следовательно, существует матрица A^{-1}; легко проверить, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \beta_1^{-1} & \cdot & \cdots \\ \cdots & , & & \cdots \\ \cdots & & \beta_2^{-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \\ \alpha_{n-p}^{-1} & -(\beta_1 \alpha_{n-p})^{-1} \alpha_1 & \cdots & -(\alpha_{n-p}\beta_{n-p-1})^{-1} \alpha_{n-p-1} \end{pmatrix}$$

Таким образом, задавшись возрастным распределением в момент k $x(k) = [x_1(k), \dots, x_{n-p}(k)]'$ мы можем помимо системы последующих значений $x(k+1) = A x(k)$, $x(k+2) = A^2 x(k)$ и т.д. восстановить еще и предыдущие $x(k-1) = A^{-1} x(k)$, $x(k-2) = A^{-2} x(k)$, и т.д. При этом операция нахождения предыдущих значений возрастных распределений сохраняет смысл до тех пор, пока $x(j) \geqslant 0$.

Положим $n-p = k$. Мы приходим к изучению системы

$$x(s+1) = A\, x(s) \tag{1.7}$$

где A - $k \times k$ популяционная матрица, а $x(s+1)$ и $x(s)$ - векторы возрастных распределений, ограниченных предрепродуктивными и репродуктивными возрастами, в соответствующие моменты времени.

6. Смена базиса

Элементы вектора $x(s)$ можно считать координатами точки в некотором k-мерном векторном пространстве, в котором равенством (1.7) определен матричный оператор A, переводящий вектор $x(s)$ в вектор $x(s+1)$.

Перейдем теперь к пространству векторов $y(s)$, подвергнув $x(s)$ невырожденному линейному преобразованию

$$y(s) = T\, x(s) \quad , \quad |T| \neq 0$$

В преобразованном пространстве оператору A соответствует некоторый оператор B, переводящий $y(s)$ в $y(s+1)$:

$$y(s+1) = B\, y(s)$$

Легко видеть, что $B = TAT^{-1}$. Таким образом матрицы A и B подобны. При этом желательно выбрать преобразующую матрицу так, чтобы $B = TAT^{-1}$ выглядела возможно проще. Если это удалось сделать, то любую аналитическую функцию $f(A)$ можно представить в виде

$$f(A) = T^{-1} f(B)\, T$$

и исследовать посредством более простых форм функции $f(B)$.

Известно, что характеристические уравнения подобных матриц совпадают:

$$|B - \mu I| = |A - \mu I| = 0 \;;$$

это также служит упрощающим обстоятельством.

Предлагается использовать следующий вид преобразующей матрицы:

$$T = \begin{bmatrix} \beta_1 \cdots \beta_{k-1} & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta_2 \cdots \beta_{k-1} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & & \beta_{k-2}\beta_{k-1} & & \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \beta_{k-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdots & & & 1 \end{bmatrix}$$

При этом

$$B = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2\beta_1 & \alpha_3\beta_2\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_{k-1}\cdots\beta_1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & \end{bmatrix}.$$

Можно считать, что достигнуто некоторое упрощение вида популяционной матрицы.

Рассмотренная трансформация первоначального базиса к новому биологически эквивалентна замене исходной популяции некоторой другой, воображаемой, которая кроме сходства со старой имеет и определенные отличия от нее. Так, видно, что особи этой новой популяции умирают целыми поколениями, т.е. исключительно по достижении предельного для всей популяции возраста. Действительно, наличие единиц на главной поддиагонали гарантирует от умирания все возрастные группы кроме последней к моменту истечения каждого единичного отрезка времени. С другой стороны среди элементов первой строки B, играющих роль коэффициентов рождаемости в новой популяции, наблюдается явление, имеющее смысл компенсации первого эффекта за счет уменьшения рождаемости. Это есть иллюстрация того математического факта, что рост численности обеих популяций одинаков; последнее в свою очередь вытекает из равенства собственных чисел A и B.

7. Устойчивость

Проблема устойчивости связана с изучением корней характеристического уравнения популяционной матрицы; характеристическое уравнение может быть сразу написано после получения матрицы B, т.к числовые коэффициенты при степенях μ^{k-1}, μ^{k-2}, и т.д. есть просто элементы первой строки B с отрицательными знаками. Рассмотрим систему

$$y(i+1) = B\,y(i) + h\,z(i) \qquad (1.8)$$

где $y(i+1)$, $y(i)$ и h есть k-мерные векторы, B — матрица, подобная популяционной A и $z(i)$ — скалярное управление. Допустим далее, что все собственные значения B $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ простые. Мы располагаем теперь совокупностью k линейно-независимых частных решений однородной системы, которая получается из (1.8) при $z(i) \equiv 0$. Общее решение однородной системы есть

$$\bar{y}(i) = \mu_1^i \cdot c_1 + \mu_2^i c_2 + \dots + \mu_k^i \cdot c_k \qquad (\nabla\Delta)$$

Методом вариации постоянной найдем частное решение (1.8) в виде:

$$\tilde{y}(i) = \sum_{1 \le p_1 < \dots < p_j \le k} \mu_{p_e}^i \sum_{s=1}^{i} \mu_{p_e}^{-s} h\, z(s-1) \quad ; \qquad (\square)$$

в частности, может быть

$$\tilde{y}_p(i) = \mu_p^i \sum_{s=0}^{i-1} \mu_p^{-s-1} \cdot h\, z(s)$$

<u>Определение 1.1</u> Однородная система разностных уравнений

$$y(i+1) = B\, y(i)$$

называется устойчивой, если все собственные значения матрицы B по абсолютной величине меньше единицы.

Данное определение устойчивости является удобным в приложениях частным случаем более общего определения. Имея ввиду $(\nabla\Delta)$, можно заключить, что это определение аналогично определению асимптотической устойчивости по Ляпунову.

В устойчивом случае $|\mu_i| < 1$, $i = 1, \dots, k$ общее решение однородной системы $(\nabla\Delta)$ стремится к нулю при $i \to \infty$, поэтому при больших i общее решение неоднородной системы (1.8) определяется ее частным решением (□).

Далее, установленное в п°4 наличие у популяционной матрицы положительного и наибольшего по модулю собственного значения позволяет несколько упростить данное определение устойчивости. Пронумеруем числа μ_i в порядке убывания их абсолютной величины:

$$\mu_1 > |\mu_2| > |\mu_3| > \ldots > |\mu_k|$$

Для устойчивости однородной системы разностных уравнений с популяционной матрицей A (или B) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_1 < 1$$

Как видно из (∇Δ), устойчивая популяция вымирает при $i \to \infty$, если она предоставлена самой себе; присутствие управляющего воздействия $\tau(j)$ может воспрепятствовать этому процессу только в случае, если $\tau(j) > 0$ при $\forall j \in [0, \infty)$, т.к. общее решение (1.8) $y(i) \longrightarrow \tilde{y}(i)$ и оно необходимо положительно. Однако, в большинстве задач мы можем только истреблять особей данной популяции и, значит, $\tau(j) \leq 0$.

Корень μ_1 всегда позволяет построить вещественное частное решение системы (1.8):

$$\tilde{y}_1(i) = \mu_1^i \sum_{s=0}^{i-1} \mu_1^{-s-1} h\, \tau(s),$$

к которому в важном частном случае

$$\mu_1 > 1, \quad |\mu_k| < \ldots < |\mu_2| < 1$$

сходится любое решение вида (□) при $p_1 = 1$, а общее решение однородной системы

$$\bar{y}(i) \longrightarrow \mu_1^i c_1$$

Более того, изучение конкретных примеров убеждает нас в том, что при больших временах i обычно

$$\bar{y}(i) \cong \mu_1^i c_1$$

также и в общем случае.

В заключение отметим, что качественные выводы, сделанные для простых μ_i могут быть полностью перенесены и на случай кратных собственных значений.

8. Две теоремы о наибольшем собственном числе

В n°7 показанно, что устойчивость или неустойчивость популяции зависят от того, как соотносятся числа μ_1 и 1. Окончателно вопрос об устойчивости может быть решен на основании вида матрицы B.

<u>β. Для выполнения неравенства $\mu_1 \geq 1$ необходимо и достаточно, чтобы было</u>

$$\sum_{s=1}^{k} \alpha_s \prod_{p=1}^{s-1} \beta_p \geq 1$$

<u>Необходимость.</u> Составим разность

$$\mu^k - \Delta(\mu) - \mu^k \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \prod_{p=1}^{s-1} \beta_p =$$

$$= \alpha_1 (1-\mu)\mu^{k-1} + \alpha_2\beta_1 (1-\mu^2)\mu^{k-2} + \ldots + \alpha_k\beta_{k-1}\cdots\beta_1 (1-\mu^k)$$

Здесь, очевидно, $\Delta(\mu) = |I\mu - A| = |I\mu - B|$.

Положим $\mu = \mu_1 \geq 1$, тогда $\Delta(\mu_1) = 0$ и

$$\mu_1^k - \mu_1^k \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \prod_{p=1}^{s-1} \beta_p \leq 0$$

или

$$1 \leq \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \prod_{p=1}^{s-1} \beta_p$$

Достаточность. Пусть $\sum_{s=1}^{k} \alpha_s \prod_{p=1}^{s-1} \beta_p \geq 1$. Домножим это неравенство на степень μ_a^k, где μ_a – положительное собственное число популяционной матрицы; к левой части неравенства прибавим $\Delta(\mu_a)=0$; имеем:

$$\Delta(\mu_a) + \mu_a^k \sum_{s=1}^{k} \alpha_s \prod_{p=1}^{s-1} \beta_p \geq \mu_a^k$$

или

$$\alpha_1(1-\mu_a)\mu_a^{k-1} + \alpha_2\beta_1(1-\mu_a^2)\mu_a^{k-2} + \dots + \alpha_k\beta_{k-1}\cdots\beta_1(1-\mu_a^k) \leq 0$$

Здесь $\alpha_s \geq 0$, $\beta_s > 0$ и μ_a – положительно. Поэтому $\mu_a \geq 1$. Но $\mu_1 = \mu_a$ и значит $\mu_1 \geq 1$.

γ. Для выполнения неравенства $\mu_1 < 1$ необходимо и достаточно, чтобы было

$$\sum_{s=1}^{k} \alpha_s \prod_{p=1}^{s-1} \beta_p < 1$$

Доказательство целиком следует из утверждения β.

Таким образом система популяционных разностных уравнений устойчива тогда и только тогда, когда

$$\sum_{s=1}^{k} \alpha_s \prod_{p=1}^{s-1} \beta_p < 1$$

9. Собственные векторы матриц B и B' и их свойства.

Применение матричного оператора B к некоторому k-мерному вектору возрастного распределения $y(p)$ дает, вообще говоря, вектор $y(p+1)$. Если потребовать, чтобы

$$y(p+1) = \mu \cdot y(p),$$

то мы приходим к уравнению

$$(B - I\mu)\, y(p) = 0, \tag{1.9}$$

решением которого в случае простых собственных значений $\mu_1, \dots, \mu_k$, будут k линейно-независимых собственных векторов $y_1, \dots, y_k$. Подобным же образом из уравнения

$$z(p)\,(B - I\mu) = 0 \tag{1.9'}$$

определяются k линейно-независимых собственных векторов $z_1', \dots, z_k'$ матрицы B'.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что вектор $(\mu_i^{k-1}\ \mu_i^{k-2}\ \cdots\ \mu_i\ 1)'$ удовлетворяет уравнению (1.9), а вектор $(1\ \ \Delta_1^i\ \ \Delta_2^i\ \ \dots\ \ \Delta_{k-1}^i)'$, где $\Delta_s^i = |I\mu_i - B_s|$ - главный минор порядка s матрицы $(I\mu_i - B)$, удовлетворяет (1.9') для всех номеров i.

Отметим два важных свойства полученных собственных векторов.

1) Системы векторов y_i и z_i', $i = 1, \dots, k$ линейно-независимы, поэтому каждая из них может служить базисом в соответствующем k-мерном пространстве, т.е. любые векторы $y(i)$ и $z(j)$ могут быть представлены:

$$y(j) = l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_k y_k$$

$$z(j) = g_1 z_1 + g_2 z_2 + \dots + g_k z_k$$

где $l_1, \dots, l_k$ и $g_1, \dots, g_k$ - скаляры, а вектор $z(j)$ есть любая вектор-строка в k-мерном пространстве.

2) Имеет место свойство ортогональности между полученными системами собственных векторов, именно:

$$z_k \cdot y_s = 0, \quad k \neq s$$

Оба свойства суть известные результаты линейной алгебры. Построим матрицу Π_j, присоединенную к $(B-I\mu_j)$. По определению

$$(B - I\mu_j)\Pi_j = I\,\Delta(\mu_j) = 0,$$

где $\Delta(\mu_j) = |B - I\mu_j| = |I\mu_j - B| = 0$. Здесь и в дальнейшем учитывается свойство перестановочности матриц B и $I\mu_j$ [см [3], стр. 94].

С другой стороны по теореме Кэли-Гамильтона

$$\Delta(B) = (B - I\mu_j)\prod_{s\neq j}(B - I\mu_s) = 0$$

Итак, $\Pi_j = \prod_{s\neq j}(B - I\mu_s)$.

Поскольку, очевидно, дефект особой матрицы $(B-I\mu_j)$ есть единица, то и ранг присоединенной матрицы Π_j равен единице. Значит, любые два столбца (две строки) матрицы Π_j пропорциональны друг другу.

С другой стороны, из равенств

$$(B - I\mu_j)\Pi_j = 0$$

и

$$\Pi_j(B - I\mu_j) = 0$$

при сравнении их с (1.9) и (1.9'), ясно, что собственные векторы y_s и z_s, отвечающие собственному значению μ_s, могут быть взяты пропорциональными соответственно каждому столбцу и строке матрицы Π_s

Этим же свойством обладает диадное произведение:

$$y_s \cdot z_s = \begin{bmatrix} y_{s1} \\ \vdots \\ y_{sk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{s1} & \cdots & z_{sk} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y_{s1} z_{s1} & \cdots & y_{s1} z_{sk} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{sk} z_{s1} & \cdots & y_{sk} z_{sk} \end{pmatrix},$$

а поскольку Π_s, очевидно, определена с точностью до множителя, можно принять

$$y_s z_s = \Pi_s$$

При этом $z_s \cdot y_s = Sp\, \Pi_s$. Найдем это произведение, опираясь на приведенные выше собственные вектора. Имеем

$$z_s\, y_s = \begin{bmatrix} 1 & \Delta_1^s & \Delta_2^s & \cdots & \Delta_{k-1}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_s^{k-1} \\ \mu_s^{k-2} \\ \vdots \\ \mu_s \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \mu_s^{k-1} + \Delta_1^s \mu_s^{k-2} + \ldots + \Delta_{k-2}^s \mu_s + \Delta_{k-1}^s =$$

$$= \mu_s^{k-1} + [\mu_s - d_1]\mu_s^{k-2} + [\mu_s^2 - d_1\mu_s - d_2\beta_1]\mu_s^{k-3} + \ldots + [\mu_s^{k-1} - d_1\mu^{k-2} \ldots - d_{k-1} \cdots \beta_1] =$$

$$= k \cdot \mu_s^{k-1} + (k-1)\mu_s^{k-2} + \ldots + d_{k-1}\beta_{k-2} \cdots \beta_1 = \frac{d}{d\mu} \Delta(\mu)\Big|_{\mu=\mu_s}$$

Но

$$\frac{d}{d\mu} \Delta(\mu)\Big|_{\mu=\mu_s} = (\mu_s - \mu_1) \cdots (\mu_s - \mu_{s-1})(\mu_s - \mu_{s+1}) \cdots (\mu_s - \mu_k),$$

и значит $$z_s \cdot y_s = \prod_{j \neq s} (\mu_s - \mu_j)$$

10. Спектральные представления

Полученное в n°9 выражение для произведения $z_i \cdot y_i$ вещественно, ибо любая комплексная разность $(\mu_p - \mu_t)$ умножается на комплексно-сопряженную с ней $\overline{(\mu_p - \mu_t)}$; это произведение можно считать, кроме того, положительным, т.к. собственные вектора определены с точностью до произвольного множителя, в качестве которого всегда можно выбрать -1. Положим

$$z_i\, y_i = q^2$$

Теперь собственные векторы могут быть нормализованы:

$$\frac{z_i}{|q|} \cdot \frac{y_i}{|a|} = 1$$

Диадное произведение $\frac{y_i}{|a|} \cdot \frac{z_i}{|a|} = \frac{\Pi_i}{q^2} = S_i$ служит определением для спектральной матрицы S_i. Очевидно

$$S_i^2 = S_i \,, \quad S_i \cdot S_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{i=1}^{k} S_i = I$$

Пусть теперь $f(B)$ есть полином от матрицы B, тогда согласно формуле Лагранжа-Сильвестра

$$f(B) = \sum_{s=1}^{k} \frac{\prod_{j\neq s} (B - \mu_j I)}{\prod_{j \neq s} (\mu_s - \mu_j)} f(\mu_s) \,,$$

причем здесь все μ_j считаются простыми.
Иначе

$$f(B) = \sum_{i=1}^{k} S_i \cdot f(\mu_i)$$

Мы получили возможность представить матрицы B и B^m в виде:

$$B = \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \ldots + \mu_k S_k$$

$$B^m = \mu_1^m S_1 + \mu_2^m S_2 + \ldots + \mu_k^m S_k$$

Как уже отмечалось, при больших временах m эффект, вызываемый наибольшим положительным собственным числом μ_1, часто подавляет все прочие, поэтому примем приближенно

$$B^m \cong \mu_1^m S_1 \qquad \left(\tfrac{\Delta}{\nabla}\right)$$

и

$$y(0) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k \cong c_1 y_1$$

Тогда

$$\frac{y(m)}{|a|} = B^m \frac{y(0)}{|a|} \simeq \mu_1^m S_1 c_1 \frac{y_1}{|a|} = \mu_1^m c_1 \frac{y_1}{|a|}$$

Формула $\left(\frac{\triangle}{\nabla}\right)$ позволяет придать некоторое биологическое толкование вектору z_1, введенному в теорию вместе со всеми z_j из соображений симметрии. В №2 показано, что сумма элементов j-го столбца матрицы B^m есть число особей, вносимых в популяцию к моменту m одной особью, находившейся в момент 0 в возрастной группе от $j-1$ до j. Согласно $\left(\frac{\triangle}{\nabla}\right)$ при больших m матрица B^m только скалярным множителем отличается от S_1, а j-ый столбец последней по построению пропорционален j-му элементу вектора z_1 т.е. z_{1j}.

Далее, общая численность популяции в момент m с начальным распределением $y(0) = [y_1(0) \dots y_k(0)]'$ согласно №2 есть

$$N(m) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} y_j(0) f_{ij}^m$$

где f_{ij}^m есть элемент B^m, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца; в нашем случае приближенно $f_{ij} \simeq \mu_1^m \frac{y_{1i} z_{1j}}{a^2}$, поэтому

$$N(m) \simeq \frac{\mu_1^m}{a^2} \sum_{i=1}^{k} y_{1i} \sum_{j=1}^{k} y_j(0) z_{1j} =$$

$$= \frac{\mu_1^m}{a^2} \sum_{i=1}^{k} y_{1i} \cdot z_1 \cdot y(0)$$

Биологическую интерпретацию для z_s, $s > 1$, подыскать не удается.

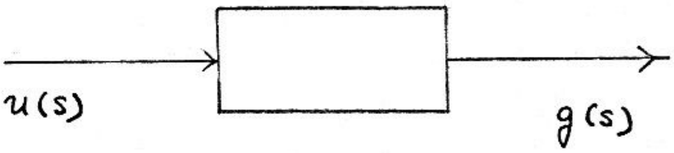
Глава 2 Управляемость и наблюдаемость дискретной популяционной системы

1. Уравнения в нормальной форме и передаточная функция

Коэффициенты матрицы F в уравнениях (1.2′) учитывают совокупность свойств популяции в ее взаимодействии со средой и имеют, очевидно, стохастическую природу. Управление, т.е некоторое разумное вмешательство человека в жизнь популяции, носит планомерный характер; в популяционных уравнениях оно приводит к появлению неоднородных членов. Пусть в момент времени s мы добавляем в популяцию $b_j u(s)$ особей возраста от $j-1$ до j, $j=1,2,\ldots,n$, причем будем пока считать, что эти числа могут быть как положительными, так и отрицательными; необходимо выбрать $b_j u(s)$ так, чтобы линейная комбинация $g(s)= = c_1 x_1(s) + \ldots + c_n x_n(s)$, где не все c_i нули, изменялась во времени некоторым заданным образом. Весовые коэффициенты c_i являются выразителями отбора (присоединения) особей по каким-либо качественным или количественным признакам в соответствии с задачей управления. Мы приходим к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} x(s+1) &= F x(s) + b\, u(s) \\ g(s) &= c' x(s) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Это не что иное, как нормальная форма Коши системы разностных уравнений; она полностью описывает все статические и динамические свойства биологической системы — популяции. Поэтому впредь мы будем отождествлять популяцию с ее математической моделью, записанной в виде системы (2.1). В этой записи $u(s)$ имеет смысл входного сигнала на входе разомкнутой системы управления, $g(s)$ – это выходной сигнал, а $x_1(s), \ldots, x_n(s)$ есть совокупность фазовых координат объекта в пространстве состояний в момент s (фиг. 1)



Фиг. 1

В главе 1 показано, что в случае вырождения при $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_{k-1}$ всегда можно ограничиться изучением системы в форме

$$x^1(s+1) = A x^1(s) + b^1 u^1(s)$$

где A – $k \times k$ популяционная матрица, причем $\alpha_k > 0$, а $x^1(s+1)$, $x^1(s)$ и b^1 – k-мерные векторы. Добавляя соответствующую комбинацию репродуктивных возрастов с весовыми коэффициентами $c_1, \ldots, c_k$ и опуская верхний индекс, запишем

$$\begin{aligned} x(s+1) &= A x(s) + b u(s) \\ g(s) &= c' x(s) \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Остается добавить, что выбор базиса в пространстве состояний произволен, и ничто не указывает на необходимость трансформации популяционной матрицы A; поэтому мы остановимся на системе (2.2). Простота дальнейших построений оправдывает этот шаг. Частное решение (2.2) легко найти методом вариации постоянной; оно имеет вид

$$g(s) = \sum_{j=0}^{s-1} c' A^{s-j-1} b\, u(j) = \sum_{j=0}^{s-1} H(s-j) u(j)$$

Здесь $H(s-j) = c'A^{s-j-1}b$ весовая функция системы. Принимая во внимание условие физической реализуемости $H(s-j) \equiv 0$ при $\forall j > s-1$, имеем

$$g(s) = \sum_{j=0}^{\infty} H(s-j)\,u(j)$$

К последнему равенству применим одностороннее Z-преобразование; на основании теоремы о свертке

$$g(z) = H(z)\,u(z)$$

Нами получено определение передаточной функции. Таким образом, помимо уравнений в нормальной форме (2.2) для описания системы может быть использована функция $H(z)$, устанавливающая соответствие между входом $u(z)$ и выходом $g(z)$. Поскольку $H(z)$ определена посредством частного решения (2.2) при нулевых начальных условиях, то ясно, что она описывает только вынужденную составляющую движения. Отсюда же следует, что соответствие между двумя предложенными описаниями не является взаимно однозначным. Существенно, что мы не можем судить об устойчивости системы на основании передаточной функции. С другой стороны мы получили компактную запись исходной системы, удобную в приложениях.

Мы естественным путем подошли к проблеме управляемости и наблюдаемости, решение которой позволит выяснить те условия, при которых передаточная функция является исчерпывающей характеристикой системы.

2. Основные определения и критерий Калмана

Определение 2.1. Система (2.2) называется не полностью управляемой, если путем смены базиса она может быть приведена к виду

$$
\begin{aligned}
x^1(s+1) &= A^{11}x^1(s) + A^{12}x^2(s) + b\,u(s)\\
x^2(s+1) &= A^{22}x^2(s)\\
g(s) &= c^{1\prime}x^1(s) + c^{2\prime}x^2(s)\,,
\end{aligned}
$$

где ν_1 и $\nu_2=k-\nu_1$ размерности векторов x^1 и x^2, и полностью управляемой в противном случае.

Определение 2.2 Система (2.2) называется не полностью наблюдаемой, если путем смены базиса она может быть приведена к виду

$$
\begin{aligned}
x^1(s+1) &= A^{11}x^1(s) + b^1\cdot u(s)\\
x^2(s+1) &= A^{21}x^1(s) + A^{22}x^2(s) + b^2u(s)\\
g(s) &= c^{1\prime}x^1(s)\,,
\end{aligned}
$$

где размерность векторов x^1 и x^2 есть ν_1' и $\nu_2'=k-\nu_1'$, и полностью наблюдаемой в противном случае.

В самом общем виде система (2.2) может содержать четыре части. Это значит, что посредством некоторой смены базиса в разностных уравнениях могут быть выделены четыре группы:

$$
\begin{aligned}
&x^1(s+1) = A^{11}x^1(s) + A^{12}x^2(s) + A^{13}x^3(s) + A^{14}x^4(s) + b^1u(s)\\
&x^2(s+1) = A^{22}x^2(s) + A^{24}x^4(s) + b^2u(s)\\
&x^3(s+1) = A^{33}x^3(s) + A^{34}x^4(s)\\
&x^4(s+1) = A^{44}x^4(s)\\
&g(s) = c^{2\prime}x^2 + c^{4\prime}x^4\,,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где $x^l(s)$ вектор размерности ν_l и $\sum_l \nu_l = k$.

Все фазовые координаты образуют четыре группы:

$$x(s) = \begin{bmatrix} x^1(s) \\ x^2(s) \\ x^3(s) \\ x^4(s) \end{bmatrix},$$

которые определяют следующие части системы:

управляемую и ненаблюдаемую (часть I),
управляемую и наблюдаемую (часть $\underline{II}$),
неуправляемую и ненаблюдаемую (часть $\underline{III}$),
неуправляемую и наблюдаемую (часть $\underline{IV}$).

Характеристический полином системы (2.4) разбивается на четыре множителя:

$$|I\xi - A| = \begin{vmatrix} I\xi - A^{11} & -A^{12} & -A^{13} & -A^{14} \\ \cdot & I\xi - A^{22} & \cdot & -A^{24} \\ \cdot & \cdot & I\xi - A^{33} & -A^{34} \\ \cdot & \cdot & \cdot & I\xi - A^{44} \end{vmatrix} =$$

$$= |I\xi - A^{11}| \cdot |I\xi - A^{22}| \cdot |I\xi - A^{33}| \cdot |I\xi - A^{44}|$$

Для определения передаточной функции перейдем в (2.4) к Z-преобразованию при нулевых начальных условиях. Учитывая, что при этом для $x^3(s)$ и $x^4(s)$ существуют только тривиальные решения

$$x^3(s) \equiv 0 \quad , \quad x^4(s) \equiv 0 ,$$

получим

$$\begin{aligned} z\,x^1(z) &= A^{11}x^1(z) + A^{12}x^2(z) + b^1 u(z) \\ z\,x^2(z) &= \qquad\qquad\quad A^{22}x^2(z) + b^2 u(z) \\ y(z) &= c^{2\prime} x^2(z) \end{aligned}$$

Таким образом передаточная функция системы

$$H(z) = c'(Iz - A)^{-1} b = c^{2\prime}[Iz - A^{22}]^{-1} \cdot b^{2}$$

определяется лишь полностью управляемой и наблюдаемой частью II. Свойства остальных частей не находят своего отражения в передаточной функции вследствие сокращения соответствующих множителей в числителе и знаменателе $H(z)$.

В дальнейшем для суждения о свойствах системы мы будем использовать следующий критерий Калмана [см [7], стр 123]:

а) размерность управляемой части системы $\nu_1 + \nu_2$ равна рангу матрицы

$$U = \| b \mid Ab \mid A^2 b \mid \dots \mid A^{k-1} b \|_{k \times k} \;;$$

система полностью управляема, если $\nu_1 + \nu_2 = k$;

б) размерность наблюдаемой части системы $\nu_2 + \nu_4$ равна рангу матрицы

$$V = \| c' \mid A'c' \mid A'^2 c' \mid \dots \mid A'^{k-1} \cdot c' \|_{k \times k} \;;$$

система полностью наблюдаема, если $\nu_2 + \nu_4 = k$.

Этот критерий вытекает из данных выше определений.

3. Управляемость

В системе (2.2) матрица A задана, а вектор b может быть различен. Пусть Ψ есть множество допустимых векторов управляемости. Векторы b, принадлежащие этому множеству, будем считать положительными; вектор $b = 0$ в рассмотрении не участвует. Выбирая вектора b положительными, мы тем самым допускаем, что управление имеет один знак в каждом возрасте в зависимости от знака $U(s)$. Необходимо выделить из Ψ подмножество F (оно может быть и пустым), на котором система (2.2) полностью управляема. Из определения, данного в n°2 настоящей главы, следует, что в случае, если система полностью управляема, мы можем влиять на каждую из фазовых координат либо непосредственно, либо через другие координаты — неявно. Ясно поэтому, что если система полностью управляема некоторым вектором $b^{(j)} \in \Psi$, у которого на j-ом месте стоит нуль, а остальные элементы различны, то она полностью управляема также и вектором $b^{(j)} + a_j e_j$, где $e_j = (\cdot \cdots \underset{j}{1} \cdot \cdots \cdot)'$ и $a_j \geq 0$. Действительно, кроме неявного воздействия на координату $x_j(s)$ у нас появилось еще и явное, причем они не могут взаимно уничтожиться вследствие неотрицательности элементов $b^{(j)}$. Поскольку любой вектор $b \in \Psi$ может быть представлен в виде линейной комбинации ортов k-мерной декартовой системы координат в виде

$$b = p_1 \cdot e_1 + p_2 e_2 + \cdots + p_k e_k ,$$

то мы приходим к следующему утверждению

<u>δ. Для того, чтобы система (2.2) была полностью управляема любым вектором $b \in \Psi$, необходимо и достаточно, чтобы она была управляема каждым ортом $e_j = (\cdot \cdots \underset{j}{1} \cdot \cdots \cdot)'$ декартовой системы координат.</u>

Сравнительно просто удается установить управляемость для двух специальных случаев.

<u>ε. Система (2.2) полностью управляема вектором $e_1 = (1 \cdot \cdots \cdot)'$</u>

<u>Доказательство</u> построим на применении критерия Калмана. Первый столбец матрицы $U^{(1)}$ известен;

это e_1. Второй столбец

$$a^1_{\cdot 1} = Ae_1 = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \cdot\\ \vdots\\ \cdot\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} a^1_{11}\\ \beta_1\\ \cdot\\ \vdots\\ \cdot\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ 2\\ \\ \\ \\ \end{array} ;$$

третий

$$a^2_{\cdot 1} = A\cdot a^1_{\cdot 1} = \begin{bmatrix}\alpha_1^2+\beta_1\alpha_2\\ \alpha_1\beta_1\\ \beta_1\beta_2\\ \vdots\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} a^2_{11}\\ a^2_{21}\\ \beta_1\cdot\beta_2\\ \vdots\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ 3\\ \\ \end{array} ;$$

Пусть $j-1$-й столбец содержит произведение $\beta_1\cdots\beta_{j-2}$ на $j-1$-ом месте:

$$a^{j-2}_{\cdot 1} = \left[\begin{array}{c} a^{j-2}_{11}\\ \vdots\\ a^{j-2}_{j-2\,1}\\ \beta_1\cdots\beta_{j-2}\\ \cdot\\ \vdots\\ \cdot\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ j-1\\ \\ \\ \\ \end{array} ,$$

тогда в j-ом столбце на j-ом месте будет стоять элемент $\beta_1\cdots\beta_{j-1}$; действительно

$$a^{j-1}_{\cdot 1} = A\cdot a^{j-2}_{\cdot 1} = \left[\begin{array}{c} \alpha_1 a^{j-2}_{11}+\dots+\alpha_{j-2}a^{j-2}_{j-2\,1}+\alpha_{j-1}\beta_{j-2}\cdots\beta_1\\ a^{j-2}_{11}\beta_1\\ a^{j-2}_{12}\cdot\beta_2\\ \vdots\\ a^{j-2}_{j-2\,1}\beta_{j-2}\\ \beta_1\cdots\beta_{j-2}\cdot\beta_{j-1}\\ \vdots\\ \cdot\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}$$

Итак, матрица

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a^1_{11} & a^2_{11} & \cdots & a^{k-1}_{11}\\ \cdot & \beta_1 & a^2_{21} & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \beta_1\beta_2 & \cdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \cdots & a^{k-1}_{k-1\,1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \beta_1\cdots\beta_{k-1}\end{bmatrix}$$

Ее определитель $|U^{(1)}| = \prod\limits_{i=1}^{k-1} \beta_i^{k-i} > 0$ т.к. все $\beta_j > 0$.

ξ. Система (2.2) полностью управляема вектором $e_k = (\cdot \cdots \cdot 1)'$

Доказательство. Первый столбец матрицы $U^{(k)}$ есть орт e_k; второй

$$a^1_{\cdot k} = A \cdot e_k = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} ;$$

третий найдется по рекуррентной формуле

$$a^2_{\cdot k} = A^2 e_k = A \cdot a^1_{\cdot k} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a^2_{1k} \\ \alpha_k \cdot \beta_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ 2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Пусть $j-1$-й столбец содержит произведение $\alpha_k \beta_{j-3} \cdots \beta_1$ на $j-2$-ом месте:

$$a^{j-2}_{\cdot k} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a^{j-2}_{1k} \\ \vdots \\ a^{j-2}_{j-3\,k} \\ \alpha_k \beta_{j-3} \cdots \beta_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ j-2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Тогда в j-ом столбце на $j-1$-ом месте будет стоять элемент $\alpha_k \beta_{j-2} \cdots \beta_1$; действительно:

$$a^{j-1}_{\cdot k} = A \cdot a^{j-2}_{\cdot k} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot a^{j-2}_{1k} + \ldots + \alpha_{j-3}\, a^{j-2}_{j-3\,k} + \alpha_{j-2}\, \alpha_k \beta_{j-3} \cdots \beta_1 \\ a^{j-2}_{1k} \cdot \beta_1 \\ a^{j-2}_{2k} \cdot \beta_2 \\ \vdots \\ a^{j-2}_{j-3\,k} \cdot \beta_{j-3} \\ \alpha_k \cdot \beta_{j-3} \cdots \beta_1 \cdot \beta_{j-2} \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ j-1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Поэтому матрица

$$U^{(k)} = \begin{pmatrix} \cdot & a_{1k}^1 & a_{1k}^2 & \dots & a_{1k}^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \beta_1 \alpha_k & \dots & \\ & & & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \alpha_k \beta_{k-2} \cdots \beta_1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix}$$

где $a_{1k}^1 = \alpha_k$. Раскрывая определитель $|U^{(k)}|$ по первому столбцу, получим

$$|U^{(k)}| = (-1)^{k+1} \alpha_k^{k-1} \prod_{s=1}^{k-2} \beta_s^{k-s-1} \neq 0, \text{ т.к. } \alpha_k > 0$$

Перед тем, как перейти к общему случаю, рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Пусть система (2.2) имеет размерность $k=3$; тогда она полностью управляема при всех e_j. Для векторов e_1 и e_3 управляемость следует из утверждений $\underline{\varepsilon.}$ и $\underline{\zeta.}$. Для вектора $b=e_2$ имеем

$$|U^{(2)}| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\beta_2 \\ 1 & 0 & \alpha_2\beta_1 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = \alpha_2\alpha_1\beta_2 + \alpha_3\beta_2^2 > 0 \text{ т.к. } \alpha_3 > 0$$

Пример 2. Пусть система (2.2) описывает популяцию, разбитую на четыре возрастные группы: $k=4$; покажем, что в этом случае при $b=e_3$ система может терять управляемость.

Согласно теоремам $\underline{\varepsilon.}$ и $\underline{\zeta.}$ система полностью управляема векторами e_1 и e_4. Остается рассмотреть два случая:

1) для $e_2 = (0\ 1\ 0\ 0)' = b$ будет

$$
\left| U^{(2)} \right| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\beta_2 & \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1 + \alpha_4\beta_2\beta_3 \\ 1 & 0 & \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1\beta_2 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \alpha_2\beta_1\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2\beta_3 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
= -\beta_2^2\beta_3 \left[\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_2\beta_3 \right] < 0 \quad \text{, т.к. } \alpha_4 > 0 ;
$$

2) для $e_3 = (0\ 0\ 1\ 0)' = b$ будет

$$
\left| U^{(3)} \right| = \begin{vmatrix} 0 & \cancel{\alpha_3} & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\alpha_4 & \alpha_1^2\cancel{\alpha_3} + \alpha_4\cancel{\alpha_1}\beta_3 + \beta_1\alpha_3\alpha_2 \\ 0 & 0 & \beta_1\alpha_3 & \alpha_3\cancel{\alpha_1}\beta_1 + \alpha_4\beta_3\beta_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cancel{\alpha_3\beta_1}\beta_2 \\ 0 & \beta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \alpha_4\alpha_3\alpha_1\beta_3^2\beta_1 + \alpha_4^2\beta_3^3\beta_1 - \alpha_3^2\alpha_2\beta_3\beta_1^2
$$

Видим, что $\left| U^{(3)} \right|$ может обращаться в нуль при некотором специальном подборе параметров.

Определение 2.3 Будем называть систему разностных уравнений в нормальной форме структурно неуправляемой, если среди допустимых векторов b найдутся такие, для которых она не может быть сделана полностью управляемой никаким выбором параметров, и структурно управляемой в противном случае.

Г. Система (2.2) структурно управляема любым ортом e_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ декартовой системы координат.

Доказательство Г. для общего случая получить не удалось.

4. Наблюдаемость

Вопрос о наблюдаемости системы (2.2) должен быть решен на основании вида матрицы A и вектор-строки C. Вид A задан, а класс Γ векторов c получим, исключив из всего многообразия k-мерных векторов-строк с неотрицательными элементами тривиальный случай $c=0$. Однако, нет необходимости изучать эту бесконечную совокупность. Ясно, что если система полностью наблюдаема с некоторым вектором $c^{(j)}$, у которого на j-ом месте нуль, а остальные элементы неотрицательны, то она наблюдаема также и с вектором $c=c^{(j)}+a_j e_j'$, где $e_j'=(\cdot \cdots \cdot \underset{j}{1} \cdot \cdots \cdot)$ и $a_j \geq 0$ – скалярная константа. Это следует из того, что в выходном сигнале $q(s)$, несущем, в силу допущения о наблюдаемости с вектором $c^{(j)}$, информацию о всех фазовых координатах $x_i(s)$ в явном или неявном виде, появляется только еще одна неотрицательная аддитивная зависимость от координаты $x_j(s)$, и, таким образом информация не убывает. С другой стороны, любой вектор $c^{(j)} \in \Gamma$ может быть разложен по ортам k-мерной декартовой системы координат:

$$c^{(j)} = \ell_1 \cdot e_1' + \ell_2 e_2' + \dots + \ell_k \cdot e_k' ,$$

поэтому

ϑ. Для того, чтобы система (2.2) была полностью наблюдаема с любым вектором $C \in \Gamma$ необходимо и достаточно, чтобы она была полностью наблюдаема посредством каждого из ортов e_j', $j=1,2,\dots,k$ декартовой системы координат.

От множества мощности континуум Γ мы приходим к конечному множеству из k векторов-ортов $e_1',\dots,e_k'$, для каждого из которых необходимо установить наблюдаемость системы (2.2)

æ. Система (2.2) полностью наблюдаема посредством вектора $e_1'=(1 \cdot \cdots \cdot)$.

Введем следующие обозначения

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = d_1 ; \quad \begin{bmatrix} \alpha_2\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_k\beta_{k-1} \\ \cdot \end{bmatrix} = d_2 ; \quad \begin{bmatrix} \alpha_3\beta_2\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_k\beta_{k-1}\beta_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix} = d_3 ,$$

и вообще

$$d_{s-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{s-1}\beta_{s-2}\cdots\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_k\beta_{k-1}\cdots\beta_{k-s+2} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ k-s+2 \\ \\ \end{array} , \quad s \leq k$$

Векторы $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$, очевидно, линейно-независимы. Применение матричного оператора A' к столбцу d_{s-1} дает сумму $\alpha_{s-1} \prod_{j=1}^{s-2} \beta_j \cdot d_{s-1} + d_s$:

$$\begin{aligned} A' d_1 &= t_1 \cdot d_1 + d_2 \\ A' d_2 &= t_2 \; d_2 + d_3 \\ A' d_3 &= t_3 \; d_3 + d_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A' \cdot d_{s-1} &= t_{s-1} \cdot d_{s-1} + d_s \qquad s \leq k \end{aligned} \qquad (\Delta\,\Delta)$$

Отметим, что здесь все векторы d_{j-1} отличны от нуля, т.к. наверняка имеют хотя бы один элемент $\alpha_k \cdot \prod_{k-j+2}^{k-1} \beta_p > 0$, поэтому числа $t_{j-1} = \alpha_{j-1} \cdot \prod_{q=1}^{j-2} \beta_q$ не являются их собственными значениями.

Приступаем к доказательству ӕ.

Первый столбец матрицы Калмана $V^{(1)}$ есть e_1. Второй получим транспонацией первой строки матрицы A:

$$a_{1\cdot}^{1\prime} = A' \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = d_1$$

Для нахождения третьего столбца применим рекуррентное соотношение:

$$a_{1\cdot}^{2'} = A'^{2} e_1 = A' \cdot a_{1\cdot}^{1'} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_1\alpha_{k-1} + \alpha_k\beta_{k-1} \\ \alpha_1\alpha_k \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot d_1 + d_2$$

Наконец, четвертый столбец

$$a_{1\cdot}^{3'} = A' \cdot a_{1\cdot}^{2'} = \alpha_1 \cdot A' \cdot d_1 + A' d_2 = \alpha_1 [\alpha_1 d_1 + d_2] + \begin{bmatrix} \alpha_2\beta_1 \cdot \alpha_1 + \alpha_3\beta_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_4\beta_3\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_2\beta_1 \cdot \alpha_{k-2} + \alpha_k\beta_{k-1}\beta_{k-2} \\ \alpha_2\beta_1 \cdot \alpha_{k-1} \\ \alpha_2\beta_1 \cdot \alpha_k \end{bmatrix} =$$

$$= (\alpha_1^2 + \alpha_2\beta_1) d_1 + \alpha_1 d_2 + d_3 = \ell_1^3 d_1 + \ell_2^3 d_2 + d_3 .$$

Итак

$$a_{1\cdot}^{1'} = d_1$$
$$a_{1\cdot}^{2'} = \ell_1^2 d_1 + d_2$$
$$a_{1\cdot}^{3'} = \ell_1^3 d_1 + \ell_2^3 d_2 + d_3$$

Допустим, что

$$a_{1\cdot}^{p'} = \ell_1^p \cdot d_1 + \ell_2^p d_2 + \dots + \ell_{p-1}^p d_{p-1} + d_p ,$$

тогда, на основании (ΔΔ), имеем

$$a_{1\cdot}^{p+1'} = \ell_1^p (t_1 d_1 + d_2) + \ell_2^p (t_2 d_2 + d_3) + \dots + \ell_{p-1}^p (t_{p-1} d_{p-1} + d_p) +$$

$$+ t_p d_p + d_{p+1} =$$

$$= \ell_1^p t_1 \cdot d_1 + (\ell_1^p + \ell_2^p t_2) d_2 + \dots + (\ell_{p-1}^p + t_p) d_p + d_{p+1} =$$
$$= \ell_1^{p+1} \cdot d_1 + \ell_2^{p+1} \cdot d_2 + \dots + \ell_p^{p+1} d_p + d_{p+1}$$

Проделаем следующие операции:

1) домножим второй столбец $|V^{(1)}|$ на $\ell_1^2, \ell_1^3, \ldots, \ell_1^{k-1}$ и и вычтем полученное соответственно из третьего, четвертого и т.д. столбцов; дальше используем уже вновь полученные столбцы;

2) домножим вновь полученный третий столбец $|V^{(1)}|$ [согласно 1) это d_2] на $\ell_2^3, \ell_2^4, \ldots, \ell_2^{k-1}$ и вычтем полученное из четвертого, пятого и т.д. столбцов соответственно; дальше используем вновь полученные столбцы;

. . . .

k-2) домножим k-1-й столбец $|V^{(1)}|$ на ℓ_{k-2}^{k-1} и вычтем полученное из k-го.

Окончательно имеем

$$V^{(1)} \sim (e_1 \mid d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_{k-1})$$

$$|V^{(1)}| = |e_1 \mid d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_{k-1}| =$$

$$= |\bar{d}_1 \mid \bar{d}_2 \mid \ldots \mid \bar{d}_{k-1}|_{k-1 \times k-1}$$

Последнее равенство получено раскрытием $|V^{(1)}|$ по первому столбцу e_1, при этом $\bar{d}_i$ есть $k-1$-мерный вектор-столбец, состоящий из элементов d_i, начиная со второго.

Мы получили треугольный определитель, вдоль побочной диагонали которого стоят элементы вида $\alpha_k \prod\limits_{k-s+2}^{k-1} \beta_p > 0$, поэтому

$$|V^{(1)}| = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k-2} i} \alpha_k^{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \beta_i^{i-1} \neq 0, \text{ т.к. } \alpha_k > 0,$$

Теорема доказана.

<u>Д. Система (2.2) полностью наблюдаема посредством орта $e_k' = (\cdot \ \cdots \ \cdot 1)$</u>

Этот случай особенно прост.

Первый столбец матрицы $V^{(k)} = \| c' \,|\, A'c' \,|\, \dots \,|\, A'^{k-1}c' \|$ есть e_k. Второй есть транспонированная последняя строка матрицы A:

$$a_{k\cdot}^{1\prime} = A' \cdot e_k = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \cdot \\ \beta_{k-1} \\ \cdot \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ k-1 \\ \\ \end{array} ;$$

третий

$$a_{k\cdot}^{2\prime} = A' \cdot a_{k\cdot}^{1\prime} = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \cdot \\ \beta_{k-1}\beta_{k-2} \\ \vdots \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ k-2 \\ \\ \end{array} .$$

Пусть $j-1$-й столбец содержит произведение $\beta_{k-1} \cdots \beta_{k-j+1}$ на $k-j+2$-ом месте:

$$a_{k\cdot}^{j-2\prime} = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \cdot \\ \beta_{k-1} \cdots \beta_{k-j+1} \\ \vdots \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ k-j+2 \\ \\ \end{array} ,$$

тогда

$$a_{k\cdot}^{j-1\prime} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \beta_{k-1} \\ \alpha_k & & & \cdot \end{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \cdot \\ \beta_{k-1} \cdots \beta_{k-j+1} \\ \vdots \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \cdot \\ \beta_{k-1} \cdots \beta_{k-j} \\ \vdots \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ k-j+1 \\ \\ \end{array} ,$$

и поэтому матрица $V^{(k)}$ содержит ненулевые элементы только на второй диагонали. Имеем:

$$|V^{(k)}| = \left| \begin{array}{cccc} & & & \beta_{k-1} \cdots \beta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \beta_{k-1}\beta_{k-2} & \\ & \beta_{k-1} & & \\ 1 & & & \end{array} \right| = (-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} i} \prod_{i=1}^{k-1} \beta_i^{\,i} \neq 0$$

<u>Ут.</u> <u>Система (2.2) полностью наблюдаема посредством любого орта $e_j' = (\cdot \cdots \cdot \underset{j}{1} \cdot \cdots \cdot)$, $1 < j < k$</u>

Доказательство. Первый столбец матрицы $V^{(j)}$ есть e_j. Второй столбец есть транспонированная $j-1$-я строка матрицы A:

$$a_{j-1\cdot}^{1\prime} = A' e_j = \begin{bmatrix} \vdots \\ \beta_{j-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ j-1 \\ \\ \end{matrix}$$

Последовательно применяя рекуррентную формулу $a_{j-1\cdot}^{s\prime} = A' a_{j-1\cdot}^{s-1\prime}$ найдем

$$a_{j-1\cdot}^{2\prime} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \beta_{j-1}\beta_{j-2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \ \ldots, \ a_{j-1\cdot}^{j-1\prime} = \begin{bmatrix} \beta_{j-1}\cdots\beta_1 \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Мы определили вид первых j столбцов $V^{(j)}$. Рассуждения, использованные при этом, аналогичны способу доказательства теоремы $\underline{\lambda.}$, а главный минор $V^{(j)}$ размерности $j \times j$ только порядком отличается от определителя $|V^{(k)}|$ из $\underline{\lambda.}$ и совпадает с ним при $j=k$.

Для изучения $k \times k-j$-матрицы, получающейся после отбрасывания первых j столбцов $V^{(j)}$, воспользуемся методом, разработанным при доказательстве $\underline{æ.}$ Очевидно

$$a_{j-1\cdot}^{j\prime} = A' \cdot a_{j-1\cdot}^{j-1\prime} = \prod_{s=1}^{j-1} \beta_s \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \beta \cdot d_1, \quad \text{где } \beta = \prod_{s=1}^{j-1} \beta_s$$

Видим, что $k-j$ столбцов матрицы $V^{(1)}$, начиная со второго, только множителем β отличаются от полученной $k \times k-j$-матрицы; поэтому последняя эквивалентна матрице

$$\| \beta d_1 \,\vdots\, \beta d_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \beta d_{k-j} \|_{k \times k-j} = \tilde{V} \cdot \beta$$

Последние k-j строк $\tilde{V}$ образуют $k{-}j \times k{-}j$ минор, который лишь размерностью отличается от определителя $|V^{(1)}|$ из теоремы ж. и совпадает с ним при $j=1$. Таким образом исходный определитель $|V^{(j)}|$ преобразован к блочному виду: на главной диагонали стоят миноры порядка $j \times j$ и $k{-}j \times k{-}j$, которые нам уже известны:

$$|V^{(j)}| = \begin{vmatrix} V^{(k)}_{j \times j} & \cdot \\ \cdot & \beta \cdot V^{(1)}_{k-j \times k-j} \end{vmatrix}$$

Поэтому

$$|V^{(j)}| = \alpha_k^{k-j} \cdot (-1)^{\sum_{s=1}^{j-1} s + \sum_{i=1}^{k-j-1} i} \prod_{s=1}^{j-1} \beta_s^s \cdot \prod_{i=k-j}^{k-1} \beta_i^i \neq 0$$

т.к. $\alpha_k > 0$

Теорема доказана.

5. Некоторые обобщения

Система (2.2) является частным случаем системы

$$\begin{aligned} x(s+1) &= Ax(s) + Bu(s) \\ g(s) &= Cx(s) \end{aligned} \qquad (2.2')$$

где A, как и прежде, $k \times k$-популяционная матрица, а B и C – матрицы размерности $k \times p$ и $q \times k$ соответственно, причем $p, q \leq k$.

Определения управляемости и наблюдаемости, данные в №2, могут быть совершенно аналогично сформулированы и для системы (2.2'), а критерий Калмана преобретает вид:

1) размерность $\nu_1 + \nu_2$ управляемой части системы (2.2') равна рангу матрицы:

$$U = \| B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{k-1}B \|_{k \times pk} \;;$$

система полностью управляема, если

$$\operatorname{rang} U = k \;;$$

2) размерность наблюдаемой части системы (2.2′) равна рангу матрицы

$$V = \| C' \mid A'C' \mid A^{2'}C' \mid \ldots \mid A^{k-1'}C' \|_{k \times qk} \;;$$

система полностью наблюдаема, если

$$\operatorname{rang} V = k$$

Положим $p = q = k$, $B = C = I$.
Применение критерия Калмана убеждает нас в том, что при этом система (2.2′) полностью управляема и наблюдаема.

Отметим, что система (2.2′) описывается уже не передаточной функцией, а передаточной матрицей, ибо $u(s)$ и $g(s)$ — векторы.

Результаты настоящей главы позволяют впредь считать разомкнутые системы (2.2) и (2.2′) [первую — в общем случае, вторую — в важном частном случае $B=C=I$] полностью управляемыми и наблюдаемыми. В следующей главе мы приступаем к синтезу замкнутой системы автоматического управления; при этом метод синтеза последней выбран так, что в ее передаточной функции (матрице) неизбежно происходит компенсация некоторых нулей и полюсов, и, значит, появляются неуправляемая и ненаблюдаемая части. Для нас, однако, важно обеспечить только устойчивость замкнутой системы, и метод, позволяющий добиться этого, в качестве отправной точки использует тот факт, что системы (2.2) и (2.2′) [заданная часть, объект] описываются своей передаточной функцией [матрицей], т.е. считаются полностью управляемыми и наблюдаемыми.

Глава 3 Автоматическая стабилизация численности биологической популяции.

1. Уравнения в отклонениях и задача автоматической стабилизации.

В предыдущих главах все величины, входившие в основную систему разностных уравнений в нормальной форме, считались детерминированными, причем коэффициенты рождаемости и смертности были постоянными заданными величинами. Теперь мы переходим к более естественному стохастическому построению модели. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, примем новые обозначения. Будем считать численность $y_j(s)$ особей в возрасте от $j-1$ до j в момент времени s и управление $b_{j1}v_1(s)+\dots+b_{jp}v_p(s)$, $p\leq k$, воздействующее на эту численность, стационарными в широком смысле случайными функциями дискретного аргумента s [$b_{j1},\dots,b_{jp}$ - детерминированные числа], а коэффициенты рождаемости α_i^* и смертности β_i^* - случайными величинами. Выходным сигналом системы будем считать вектор $g^*(s)$ с компонентами $c_{i1}y_1(s)+\dots+c_{ik}y_k(s)$, $i=1,2,\dots,q\leq k$. В итоге приходим к системе

$$
\begin{aligned}
y_1(s+1) &= \sum_{j=1}^{k}\alpha_j^* y_j(s) + \sum_{i=1}^{p} b_{1i}v_i(s)\\
y_2(s+1) &= \beta_1^*\cdot y_1(s) + \sum_{i=1}^{p} b_{2i}v_i(s)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_k(s+1) &= \beta_{k-1}^* y_{k-1}(s) + \sum_{i=1}^{p} b_{ki}v_i(s)\\
g_1^*(s) &= \sum_{i=1}^{k} c_{1i}y_i(s)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
g_q^*(s) &= \sum_{i=1}^{k} c_{qi}y_i(s)
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

или, в матричных обозначениях

$$
\begin{aligned}
y(s+1) &= A^*y(s) + Bv(s)\\
g(s) &= Cy(s)
\end{aligned}
\qquad (3.1')
$$

Это другая запись системы (2.2′); здесь также B и C есть матрицы управляемости и наблюдаемости размерности $k \times p$ и $q \times k$ соответственно.

Пусть нам необходимо поддержать возрастную структуру $y(s)$ вблизи некоторого постоянного заданного значения $y(s) = \hat{y}$. Положим $y(s) = \hat{y} + x(s)$, где $x(s)$ – малая случайная стационарная добавка. Если сверх того допустить, что случайная матрица A^* близка к своему математическому ожиданию $\bar{A} = M\{A^*\}$, т.е. $A^* = \bar{A} + \delta A^*$, то при этом и случайное управляющее воздействие $v(s)$ в первом приближении представимо суммой $\hat{v} + u(s)$, где $u(s)$ – мало. Система (3.1′) примет вид

$$\begin{aligned} \hat{y} + x(s+1) &= (\bar{A} + \delta A^*)[\hat{y} + x(s)] + B[\hat{v} + u(s)] \\ \hat{g} + g(s) &= C[\hat{y} + x(s)] \end{aligned} \qquad (3.1'')$$

Во втором уравнении системы (3.1″) очевидно принято $g^*(s) = \hat{g} + g(s)$, где $\hat{g}$ – детерминированная составляющая, а $g(s)$ – малая стационарная случайная функция.

После отбрасывания в первом уравнении (3.1″) члена второго порядка малости $\delta A^* x(s)$, в правых и левых частях приравняем друг другу детерминированные, а затем и случайные слагаемые; при этом первая группа соотношений

$$\begin{aligned} B\hat{v} &= (I - \bar{A})\hat{y} \\ \hat{g} &= C\hat{y} \end{aligned}$$

служит для определения неизвестных $B\hat{v}$ и $\hat{g}$, а

$$\begin{aligned} x(s+1) &= \bar{A}x(s) + \delta A^* \cdot \hat{y} + Bu(s) \\ g(s) &= Cx(s) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

есть искомые уравнения в отклонениях.

Величина $\delta A^* \hat{y}$ имеет тот же порядок малости, что и отклонение $x(s)$, поэтому она сохраняется в записи (3.2). Обозначим $\delta A^* \cdot \hat{y} = n(s)$. В данной системе вследствие отбрасывания члена $\delta A^* \cdot x(s)$, который в противном случае пришлось бы включить в $n(s)$, слагаемое $n(s)$ [помеха в контуре управления] не зависит от дискретного времени и является просто случайным вектором. Отсюда же следует, что $n(s)$ можно считать не коррелированной с полезным сигналом $x(s)$.

Отметим, что управление $u(s)$ в данном случае может быть как положительным, так и отрицательным. Опуская „черточку" над матрицей $\bar{A}$ и учитывая новое обозначение вектора помехи, получим

$$
\begin{aligned}
x(s+1) &= A\,x(s) + n(s) + B\,u(s) \\
g(s) &= C\,x(s)
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

Это окончательная форма уравнений в отклонениях.

Теперь можно перейти к постановке задачи управления: посредством выбора воздействия $u(s)$ оптимальным в смысле некоторого критерия образом придать выходному сигналу $g(s)$ заданный вид. При этом мы остановимся сначала на частном случае системы (3.3), когда матрицы управляемости и наблюдаемости имеют размерность $k \times k$ и являются единичными:

$$B = C = I$$

Уравнения в отклонениях примут вид

$$
\begin{aligned}
x(s+1) &= A\,x(s) + n(s) + u(s) \\
g(s) &= x(s)
\end{aligned}
\qquad (3.3')
$$

В главе 2 показано, что система (3.3') полностью управляема и наблюдаема.

Применим к системе (3.3′) Z-преобразование при нулевых начальных условиях:

$$z\,x(z) = A\,x(z) + n(z) + u(z)$$
$$g(z) = x(z) \qquad (3.4)$$

Объединяя первую и вторую группу уравнений, получим

$$g(z) = (Iz - A)^{-1}\left[u(z) + n(z)\right]$$

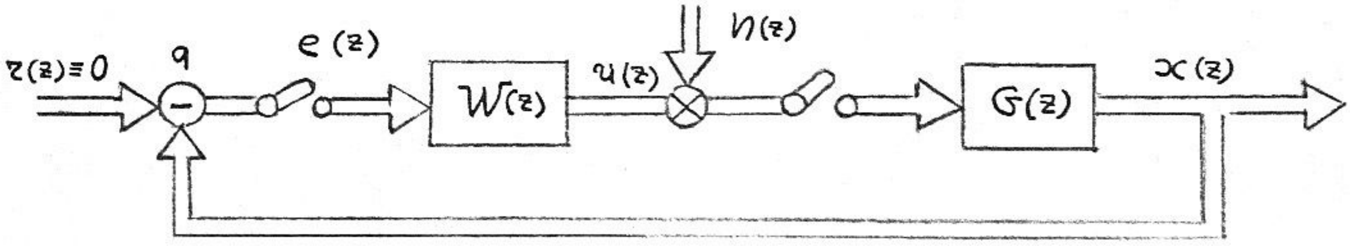
Управление $u(z)$ должно формироваться на основании выходного сигнала $g(z) = x(z)$; положив $u(z) = -W x(z)$, замкнем систему. В окончательной записи обозначим передаточную матрицу объекта $(Iz - A)^{-1}$ через $G(z)$:

$$x(z) = G(z)\left[-W x(z) + n(z)\right] \qquad (\square\square)$$

Попутно мы получили возможность написать передаточную матрицу от помехи $n(z)$, корреляционные характеристики которой заданы, к выходному сигналу $g(z) = x(z)$:

$$x(z) = \left[I + G(z) W(z)\right]^{-1} \cdot G(z) \cdot n(z) \qquad (3.5)$$

Выражение $(\square\square)$ позволяет построить структурную схему системы управления



Фиг. 2

Если в точке a (фиг. 2) приложить некоторый входной по отношению к замкнутой системе сигнал $r(z)$ [в нашем случае $r(z) \equiv 0$] и приравнять нулю помеху $n(z)$

в выражении

$$x(z) = (I+GW)^{-1}GW\,r(z) + (I+GW)^{-1}G\cdot n(z),$$

то можно представить передаточную матрицу замкнутой системы в отсутствие помех $H(z)$ с помощью матриц $W(z)$ и $G(z)$:

$$H(z) = G(I+WG)^{-1}W = (I+GW)^{-1}GW = GW(1+GW)^{-1} \qquad (3.6)$$

Важное соотношение (3.5) примет вид

$$x(z) = [I - H(z)]\,G(z)\cdot n(z) \qquad (3.5')$$

Таким образом сформулированная выше задача управления сведена к отысканию (синтезу) матрицы $W(z)$ или матрицы $H(z)$. Остается выбрать критерий, оценивающий точность работы системы и задаться видом желаемого выходного сигнала. Последний известен: это просто нуль. Полученные нами уравнения в отклонениях специально служат для постановки задачи поддержания возрастной структуры популяции вблизи некоторого расчетного уровня. Мы приходим к задаче автоматической стабилизации, которую остается только дополнить сведениями о корреляционных свойствах помехи $n(s)$ и выбором показателя оптимизации.

В теории линейных систем в качестве критерия точности целесообразно [см. [7], стр. 174] использовать квадратичный функционал ошибок. Нам предстоит найти условный минимум этого функционала, ибо система управления необходимо должна удовлетворять ряду дополнительных ограничений, призванных обеспечить устойчивость.

Ошибка системы $e(z) = r(z) - x(z) = -x(z)$, поэтому сумма взвешенных дисперсий e_j

$$J_e = J_x = \sum_{i=1}^{k} \rho_i D_{x_i} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} Sp\left[\Phi_{xx}(z) R\right]\frac{dz}{z}$$

Здесь D_{x_i} - дисперсия случайной функции $x_i(s)$, $\Phi_{xx}(z)$ - матрица спектральных плотностей $x_i(s)$, $R = diag\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$, Γ - окружность единичного радиуса в комплексной плоскости z с центром в начале координат и $j=\sqrt{-1}$ - мнимая единица.

В дальнейшем всюду будем считать $R = I$.

2. Общий вид передаточной матрицы объекта.

Примем следующее упрощающее предложение: будем считать, что система (3.3′) описывает популяцию с единственным предрепродуктивным возрастом: $\alpha_1 = 0$. Это допущение, однако, не является принципиальным.

<u>J. Передаточная матрица заданной части (объекта) системы (3.4) $G(z) = [Iz - A]^{-1}$, где A - $k\times k$ популяционная матрица, имеет вид</u>

$$\frac{1}{\Delta_k}\begin{pmatrix}
z^{k-1}\cdot\Delta_0 & \frac{1}{\beta_1}\sum\limits_{i=2}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}\beta_j & \frac{z}{\beta_1\beta_2}\sum\limits_{i=3}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}\beta_j & \dots & z^{k-3}[\alpha_{k-1}z+\alpha_k\beta_{k-1}] & z^{k-2}\alpha_k \\
\beta_1 z^{k-2}\cdot\Delta_0 & z^{k-2}\Delta_1 & \frac{1}{\beta_2}\sum\limits_{i=3}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}\beta_j & \frac{z}{\beta_2\beta_3}\sum\limits_{i=4}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}\beta_j & \dots & z^{k-3}\alpha_k\beta_1 \\
\beta_1\beta_2 z^{k-3}\cdot\Delta_0 & \beta_2 z^{k-3}\Delta_1 & z^{k-3}\cdot\Delta_2 & \frac{1}{\beta_3}\sum\limits_{i=4}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod\limits_{j=1}^{i-1}\beta_j & \dots & z^{k-4}\alpha_k\beta_1\beta_2 \\
\dots & \beta_2\beta_3 z^{k-4}\Delta_1 & \beta_3 z^{k-4}\Delta_2 & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\prod\limits_{j=1}^{k-2}\beta_j\cdot z\Delta_0 & \dots & \dots & \dots & z\cdot\Delta_{k-2} & \alpha_k\prod\limits_{j=1}^{k-1}\beta_j \\
\prod\limits_{j=1}^{k-1}\beta_j\cdot\Delta_0 & \prod\limits_{j=2}^{k-1}\beta_j\cdot\Delta_1 & \prod\limits_{j=3}^{k-1}\beta_j\cdot\Delta_2 & \dots & \beta_{k-1}\Delta_{k-2} & \Delta_{k-1}
\end{pmatrix}$$

здесь $\Delta_k = |Iz - A| = z^k - \sum_{i=2}^{k} \alpha_i z^{k-i} \prod_{j=1}^{i-1} \beta_j$, $\Delta_0 = 1$, а Δ_1, Δ_2, Δ_3 и т.д. – главные миноры определителя $|Iz-A|$ первого, второго, третьего и т.д. порядков соответственно.

Доказательство. По определению обратной матрицы имеем

$$(Iz-A)^{-1} = \frac{1}{|Iz-A|} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{k1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1k} & \cdots & g_{kk} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_k} \| g_{ij} \|_{k \times k}$$

где $\| g_{ij} \|_{k\times k}$ – присоединенная матрица, элемент которой g_{ij} есть алгебраическое дополнение к элементу i-ой строки и j-го столбца матрицы $(Iz-A)$.

1) Рассмотрим диагональные элементы g_{ss}, $s=1,2,\ldots,k$. Вычеркиванием первого столбца и первой строки в определителе

$$\begin{vmatrix} z & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_k \\ -\beta_1 & z & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & -\beta_2 & z & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & -\beta_{k-1} & z \end{vmatrix} \qquad (a)$$

найдем алгебраическое дополнение к элементу на пересечении первой строки и первого столбца $(Iz-A)$, равное g_{11}. Это, очевидно, z^{k-1}, т.к полученный определитель – треугольный. Вычеркиванием последней строки и последнего столбца в (а) получим:

$$g_{kk} = \Delta_{k-1} = z^{k-1} \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i z^{k-i} \prod_{j=1}^{i-1} \beta_j$$

Вычеркиванием s-й строки и s-го столбца получим

$$g_{ss} = \left| \begin{array}{ccccc|ccc} z & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{s-1} & -\alpha_{s+1} & \cdots & -\alpha_k \\ -\beta_1 & z & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ & -\beta_2 & z & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & -\beta_{s-2} & z & & & \\ \hline & & & & & z & & \\ & & & & & -\beta_{s+1} & z & \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & -\beta_{k-1} & z \end{array} \right|$$

Минор, стоящий на пересечении последних $k-s$ строк и столбцов определителя g_{ss} есть

$$\begin{vmatrix} z & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\beta_{s+1} & z & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots -\beta_{k-1} & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & & \\ & z & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & z \end{vmatrix} = \left| z\,I \right|_{k-s\times k-s} \qquad (b)$$

Действительно, умножим s-ю строку на $\frac{\beta_{s+1}}{z}$ и сложим с $s+1$-й, затем вновь полученную $s+1$-ю строку умножим на $\frac{\beta_{s+2}}{z}$ и сложим с $s+2$-й, etc. В итоге получим (b).
На пересечении первых $s-1$ строк и столбцов в определителе g_{ss} стоит Δ_{s-1}, поэтому

$$g_{ss} = \begin{vmatrix} \Delta_{s-1} & \cdot \\ \cdot & Iz \end{vmatrix} = z^{k-s}\cdot\Delta_{s-1} \qquad (c)$$

Если принять $\Delta_0 = 1$, то выражение (c) будет общим для всех $s = 1, 2, \dots, k$.

2) Обратимся к элементам g_{j1}, $j = 2, \dots, k$. Каждый из них может быть получен вычеркиванием из характеристического определителя (a) j-й строки и первого столбца с присвоением полученному определителю знака $(-1)^{j+1}$, т.е.

$$g_{j1} = (-1)^{j+1}\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_j & -\alpha_{j+1} & \cdots & -\alpha_k \\ z & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ -\beta_2 & z & & \cdot & \cdot & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & -\beta_{j-2} & z & \cdot & & \\ & & & -\beta_j & z & & \\ & & & & -\beta_{j+1} & z & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & -\beta_{k-1} & z \end{vmatrix}$$

Умножим вторую строку g_{j1} на $\frac{\beta_2}{z}$ и сложим с третьей; далее вновь полученную третью строку умножим на $\frac{\beta_3}{z}$ и сложим с четвертой и т.д.; вновь полученную $j-2$-ю строку умножим на $\frac{\beta_{j-2}}{z}$ и сложим с $j-1$-й строкой. Затем вторую, третью и т.д., $j-1$-ю строки умножим на $\frac{\alpha_2}{z}$, $\frac{\alpha_3}{z}$ и т.д., $\frac{\alpha_{j-1}}{z}$ соответственно и сложим последовательно с первой строкой. Получим

$$g_{j1}=(-1)^{j+1}\cdot\begin{vmatrix} \cdot & \cdots & & -\alpha_j & \cdots & -\alpha_k \\ z & \cdot & & & & \\ \cdot & z & \cdot & & \cdots & \\ \cdot & \cdot & z & \cdot & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & z & \cdot & \cdot \\ & & & -\beta_j & z & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & -\beta_{k-1} & z \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{j+1}\cdot(-1)^{j-2}z^{j-2}\cdot\begin{vmatrix} -\alpha_j & -\alpha_{j+1} & \cdots & -\alpha_k \\ -\beta_j & z & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & z \\ \cdot & \cdot & \cdots & -\beta_{k-1}\ z \end{vmatrix} \qquad (d)$$

Сравнивая полученный определитель с известным характеристическим определителем (a)

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} z & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_k \\ -\beta_1 & z & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots -\beta_{k-1} & z \end{vmatrix} = z^k-\sum_{i=2}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod_{s=1}^{i-1}\beta_s,$$

замечаем, что он стоит на пересечении последних $k-j+1$ строк и столбцов Δ_k с тем только отличием, что в левом верхнем углу (d) находится элемент $-\alpha_j$, а не z. Учитывая это, имеем

$$g_{j1}=(-1)^{2j-1}z^{j-2}\left[-z^{k-j}\cdot\alpha_2-\sum_{i=j+1}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod_{s=j}^{i-1}\beta_s\right]=$$

$$=\frac{z^{j-2}}{\beta_{j-1}}\sum_{i=j}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod_{s=j-1}^{i-1}\beta_s\ ;\ j=2,\dots,k$$

Или:

$$g_{j1}=\frac{z^{j-2}}{\prod_{p=1}^{j-1}\beta_p}\sum_{i=j}^{k}\alpha_i z^{k-i}\prod_{s=1}^{i-1}\beta_s,\ j=2,3,\dots,k$$

Вообще любой элемент g_{js}, $j=s+1,\dots,k$ расположенный выше главной диагонали, найдется вычеркиванием из (a) j-ой строки и s-го столбца:

$$g_{js} = (-1)^{j+s} \cdot \begin{vmatrix}
Z & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{s-1} & -\alpha_{s+1} & \cdots & -\alpha_{j-1} & -\alpha_j & \cdots & -\alpha_k \\
-\beta_1 & Z & & & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
& & & Z & & & & & & \\
& & & -\beta_{s-1} & Z & & & & & \\
& & & & -\beta_{s+1} & Z & & & & \\
& & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
& & & & & & -\beta_{j-2} & Z & & \\
& & & & & & & -\beta_j & Z & \\
& & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & & & & & -\beta_{k-1} & Z
\end{vmatrix}$$

Учитывая, как и ранее, известное свойство определителей, после несложных преобразований получим:

$$g_{js} = \frac{Z^{j-s-1}}{\beta_s \cdots \beta_{j-1}} \sum_{i=j}^{k} \alpha_i Z^{k-i} \prod_{p=j-1}^{i-1} \beta_p \quad ; \quad j=s+1,\dots,k$$

3) Рассмотрим элементы g_{js}, $s=j+1,\dots,k$, расположенные ниже главной диагонали. Вычеркнем из определителя (a) j-ю строку и s-ый столбец:

$$g_{js} = (-1)^{s+j} \begin{vmatrix}
Z & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{j-1} & -\alpha_j & \cdots & -\alpha_{s-1} & \cdots & -\alpha_k \\
-\beta_1 & Z & & & & & & & \\
& & -\beta_{j-2} & Z & & & & & \\
& & & & -\beta_j & Z & & & \\
& & & & & \cdots & \cdots & & \\
& & & & & & Z & & \\
& & & & & & -\beta_{s-1} & Z & \\
& & & & & & & -\beta_{s+1} & \\
& & & & & & & \cdots & \cdots \\
& & & & & & & -\beta_{k-1} & Z
\end{vmatrix}$$

На пересечении первых $j-1$ строк и столбцов стоит минор, равный Δ_{j-1}. Среди оставшихся строк две содержат только по одному элементу. Умножая эти строки на соответствующие множители и складывая с соседними, добьемся того, чтобы элементы, отличные от нуля, сохранились только вдоль главной диагонали, т.е.

$$g_{js} = (-1)^{s+j}\begin{vmatrix} \boxed{\Delta_{j-1}} & & & & \\ & \beta_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta_{s-1} & \\ & & & & z \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & z \end{vmatrix} = (-1)^{s+j}(-1)^{s-j}\beta_j\cdots\beta_{s-1}\cdot z^{k-s}\cdot\Delta_{j-1}$$

Окончательно

$$g_{js} = \Delta_{j-1}\, z^{k-s}\prod_{p=j}^{s-1}\beta_p\ , \quad s=j+1,\dots,k$$

Лемма доказана полностью.

3. Компенсация и устойчивость.

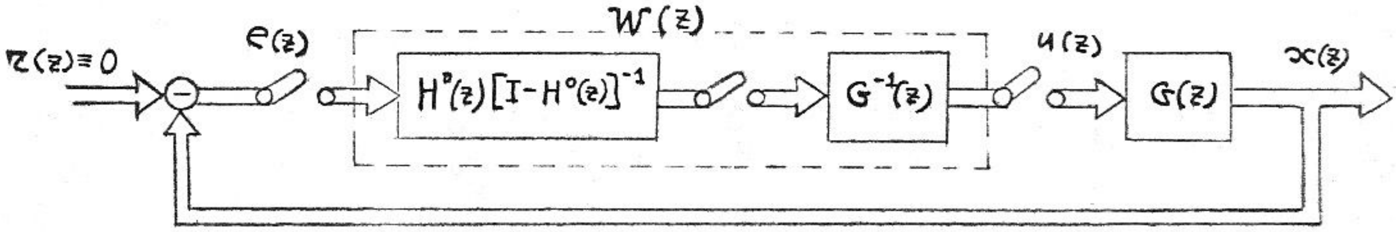
Уже отмечалось, что передаточная матрица описывает только управляемую и наблюдаемую часть системы. Это происходит вследствие сокращения во всех элементах матрицы одних и тех же нулей и полюсов. В большинстве задач управления заданную часть (объект) можно считать полностью управляемой и наблюдаемой. Именно так обстоит дело с заданной частью популяционной системы (см. главу 2). Кроме того, всегда можно добиться положения, при котором корректирующее устройство также не содержит неуправляемой и ненаблюдаемой частей. Однако даже в этом случае передаточная матрица $H(z)$ замкнутой системы может не быть исчерпывающей характеристикой системы за счет явления компенсации. Действительно, пусть требуется определить характеристики корректора так, чтобы передаточная матрица замкнутой системы $H(z)$ была равна некоторой заданной $H^0(z)$:

$$H(z) = H^0(z)$$

Воспользовавшись формулой (3.6), получим

$$W(z) = G^{-1}(z)\,H^{o}(z)\,[I - H^{o}(z)]^{-1} = G^{-1}(z)\,[I - H^{o}(z)]^{-1}\,H^{o}(z)$$

Вид передаточной матрицы $W(z)$ означает, что корректирующее устройство может рассматриваться как последовательное соединение двух многомерных звеньев $H^{o}(z)[I - H^{o}(z)]^{-1}$ и $G^{-1}(z)$, включенных так, как показано на фиг. 3



Фиг. 3

Последнее из этих звеньев имеет передаточную матрицу, инверсную по отношению к передаточной матрице заданной части $G(z)$, т.е корректирующее устройство полностью компенсирует все динамические эффекты, связанные с наличием заданной части. Таким образом ясно, что если мы остановимся на методе синтеза, основанном на первоначальном задании динамических характеристик замкнутой системы с последующим нахождением передаточной матрицы корректора, то во всех элементах передаточной матрицы прямой цепи $G(z)\,W(z)$ будет иметь место сокращение некоторых нулей и полюсов, что вызывает появление неуправляемой и ненаблюдаемой частей. При таком методе синтеза расположение полюсов передаточной матрицы $H^{o}(z)$ внутри контура Γ не может гарантировать устойчивость замкнутой системы, так как вырожденная часть системы может оказаться неустойчивой.

Это не означает, однако, что нужно отказаться от предложенного метода синтеза. Доказано [[7], стр 163, 167], что матрицу $H(z)$ можно подчинить условиям, обеспечивающим устойчивость вырожденной части.

Необходимо сделать краткое отступление. Пусть $G(z)$ есть $n \times n$ - рациональная матрица, выражающая заданную часть некоторой общего вида дискретной системы управления. Воспользуемся ее диагональным представлением:

$$G(z) = T^1(z)\, diag\left\{\frac{p_1(z)}{q_1(z)}, \ldots, \frac{p_n(z)}{q_n(z)}\right\} T^2(z) \qquad (3.7)$$

где T^1, T^2 – элементарные полиномиальные матрицы, и $p_i(z), q_i(z)$ – полиномы. Такое представление для рациональной $G(z)$ всегда существует; например, это может быть ее каноническая диагональная форма. Отметим, что если ранг $G(z)$ есть $r<n$ и (3.7) есть каноническое представление $G(z)$, то

$$\frac{p_{r+1}(z)}{q_{r+1}(z)} = \ldots = \frac{p_n(z)}{q_n(z)} = 0$$

причем

$$G(z) = T^1(z)\, diag\left\{\frac{p_1(z)}{q_1(z)} \cdots \frac{p_r(z)}{q_r(z)}\; 0 \ldots 0\right\} T^2(z) =$$

$$= \tilde{T}^1(z) \cdot diag\left\{\frac{p_1(z)}{q_1(z)} \cdots \frac{p_r(z)}{q_r(z)}\right\} \tilde{T}^2(z)$$

где $\tilde{T}^1$ и $\tilde{T}^2$ получены из T^1 и T^2 отбрасыванием $n-r$ последних столбцов и строк соответственно.

Введем понятие факторизации передаточной матрицы объекта. Обозначим, как и раньше, через Γ контур единичного круга в комплексной плоскости z с центром в начале координат, через Γ^- – область вне Γ и через Γ^+ – область внутри контура Γ. Разобьем полиномы $p_s(z)$ и $q_s(z)$ на множители

$$p_s(z) = p_s^-(z) \cdot p_s^+(z)$$
$$q_s(z) = q_s^-(z)\, q_s^+(z)$$

где $p_s^-(z)$ и $q_s^-(z)$ имеют все нули в области Γ^- и на контуре Γ, а $p_s^+(z)$ и $q_s^+(z)$ имеют нули только в Γ^+.

<u>Определение 3.1.</u> Объект управления $G(z)$ называется <u>устойчивым</u>, если все $q_j^-(z) \equiv 1$ для всех $j=1,2,\ldots,n$

Это определение, очевидно, является удобной в данном случае модификацией более общего положения; оно совпадает с определением асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Определение 3.2. Устойчивый объект управления $G(z)$ называется минимальнофазовым, если $p_j^-(z) \equiv 1$ для всех номеров $j = 1, 2, .., n$.

Определение 3.2. также может быть сформулировано несколько иначе, и при этом так, что получит оправдание сам термин минимальнофазовость.

Для устойчивости вырожденной части разомкнутой системы фиг. 3 достаточно, чтобы передаточная матрица $H(z)$ удовлетворяла условиям

$$\begin{aligned} H(z) &= z^{-1} p^-(z) H^1(z)_+ \\ I - H(z) &= q^-(z) H^2(z)_+ \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $H^1(z)_+$ и $H^2(z)_+$ - произвольные рациональные матрицы, имеющие полюсы лишь в области Γ^+, а $p^-(z)$ и $q^-(z)$ — наименьшие общие кратные всех $p_j^-(z)$ и $q_j^-(z)$ соответственно. Подчеркнем, что для минимальнофазового объекта

$$p^-(z) = q^-(z) \equiv 1$$

Множитель z^{-1} в первом из соотношений (3.8) призван гарантировать физическую реализуемость корректора, который вырабатывает сигнал управления с запаздыванием на шаг по отношению к вызвавшему его входному сигналу.

Условимся далее считать (3.7) каноническим представлением объекта $G(z)$. Введем обозначения:

$$P^-(z) = T^1(z)\, diag\,\{p_1^-(z) \dots p_n^-(z)\}$$

$$Q^-(z) = diag\,\{q_1^-(z) \dots q_n^-(z)\}\, [T^1(z)]^{-1},$$

тогда равенства

$$H(z) = z^{-1} P^{-}(z) H^{1}(z)_{+}$$
$$I - H(z) = H^{2}(z)_{+} Q^{-}(z) \qquad (3.9)$$

являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости системы фиг. 3.

Вернемся к исходной популяционной передаточной матрице. Ее каноническое представление

$$G(z) = T^{1}(z)\, diag \left\{ \frac{p_1(z)}{q_1(z)} \cdots \frac{p_k(z)}{q_k(z)} \right\} T^{2}(z) \qquad (3.10)$$

позволяет заключить, что

$\underline{\text{Ж.}}$ Объект управления $G(z) = (Iz - A)^{-1}$, где A – популяционная матрица, не имеет нулей на всей конечной комплексной плоскости и, значит, является минимально-фазовым.

Очевидно, $|G(z)| \neq 0$, поэтому существует

$$G^{-1}(z) = [T^{2}(z)]^{-1}\, diag \left\{ \frac{q_1(z)}{p_1(z)} \cdots \frac{q_k(z)}{p_k(z)} \right\} [T^{1}(z)]^{-1}$$

Здесь $[T^{2}(z)]^{-1}$ и $[T^{1}(z)]^{-1}$ – элементарные матрицы как инверсные к элементарным $T^{2}(z)\ T^{1}(z)$; поэтому они аналитичны на всей комплексной плоскости. С другой стороны

$$G^{-1}(z) = Iz - A = \begin{pmatrix} z & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_k \\ -\beta_1 & z & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & & -\beta_{k-1} & z \end{pmatrix}$$

и, следовательно, вообще не имеет полюсов при всех $z < \infty$. Мы приходим к системе равенств

$$p_1(z) = p_2(z) = \ldots = p_k(z) = 1,$$

которая и доказывает лемму.

Таким образом условия (3.8) и (3.9) существенно упрощаются; имеем

$$\begin{aligned} H(z) &= z^{-1} H^1(z)_+ \\ I - H(z) &= q^-(z) H^2(z)_+ \end{aligned} \qquad (3.8')$$

и

$$\begin{aligned} H(z) &= z^{-1} H^1(z)_+ \\ I - H(z) &= H^2(z)_+ \, Q^-(z) \end{aligned} \qquad (3.9')$$

В записи (3.9′) устойчивая матрица $T^1(z)$ включена в произвольную устойчивую матрицу $H^1(z)_+$.

В дальнейшем мы будем пользоваться достаточными условиями в форме (3.8′). Поэтому необходимо знать $q^-(z)$.

Л. Для объекта управления $G(z) = (Iz - A)^{-1}$, где A есть $k\times k$-популяционная матрица, $q^-(z) = \Delta_k^-(z) = (z-\mu_1)\cdots(z-\mu_t)$, где $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_t \geq 1$.

Докажем эту лемму для случая, когда все собственные числа матрицы A простые:

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_k$$

В этом случае матрица A приводится к диагональной форме преобразованием подобия с невырожденной матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1^{k-1}}{\beta_1 \cdots \beta_{k-1}} & \cdots & \frac{\mu_k^{k-1}}{\beta_1 \cdots \beta_{k-1}} \\ & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\mu_1}{\beta_{k-1}} & \cdots & \frac{\mu_k}{\beta_{k-1}} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$|T| = \frac{1}{\prod_{s=1}^{k-1} \beta_s} \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\mu_i - \mu_j) \neq 0$$

Матрица T находится стандартным методом: каждый из ее столбцов пропорционален одному из собственных векторов A. Определитель $|T|$ легко сводится к определителю Вандермонда вынесением общих множителей из каждой строки. Итак

$$T^{-1}AT = diag\{\mu_1, \dots, \mu_k\} = M,$$

поэтому

$$G(z) = (Iz - A)^{-1} = (Iz - TMT^{-1})^{-1} = T^{-1}(Iz - M)^{-1}T =$$

$$= T^{-1} diag\left\{\frac{1}{z-\mu_1} \quad \cdots \quad \frac{1}{z-\mu_k}\right\} T$$

Используя известный результат алгебры, напишем следующую эквивалентность

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{z-\mu_1} & & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ & & \frac{1}{z-\mu_k} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cdots\cdots & & \\ & & 1 & \\ & & & \prod_{s=1}^{k} \frac{1}{z-\mu_k} \end{bmatrix}$$

Мы получили, очевидно, диагональную канноническую форму матрицы $G(z)$, соответствующую записи (3.10). Полином $q^-(z)$ определен как наименьшее общее кратное всех неустойчивых знаменателей $q_i^-(z)$; у нас $q_1^-(z) \equiv 1$, $q_2^-(z) \equiv 1, \dots, q_{k-1}^-(z) \equiv 1$, $q_k^-(z) = [\prod_{s=1}^{k}(z-\mu_s)]^- = \Delta_k^-(z)$, поэтому $q^-(z) = \Delta_k^-(z)$. Для случая простых собственных значений A лемма доказана. В дальнейшем мы будем считать ее справедливой также и для случая кратных корней характеристического уравнения $|I\mu - A| = 0$.

4. Оптимальное управление устойчивым объектом.

Мы переходим к постановке задачи оптимизации. Объект управления $G(z)$ считаем устойчивым, т.е. $q_1^-(z) = \dots = q_k^-(z) \equiv 1$ и следовательно $q^-(z) \equiv 1$. Поэтому условия (3.8′) примут вид

$$H(z) = z^{-1} H^1(z)_+ \qquad (3.8'')$$

Второе уравнение $I - H(z) = H^2(z)_+$ отбросим, ибо оно отражает только тот очевидный факт, что передаточная матрица замкнутой системы $H(z)$ ищется среди устойчивых матриц $H(z)_+$

Из (3.8″) видно, что единственное условие, ограничивающее свободу выбора $H(z)$, связано с физической реализуемостью корректора $W(z)$.

Критерий качества, введенный в п°1 .

$$J_e = J_x = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma Sp\left[\Phi_{xx}(z)\right] \frac{dz}{z} \qquad (3.11)$$

предполагает знание спектральной плотности ошибки $\Phi_{xx}(z)$, которая в свою очередь должна быть выражена через вероятностные характеристики помехи $n(s)$. Согласно (3.5′) имеем

$$\Phi_{xx}(z) = \left[I - H(z^{-1})\right] G(z^{-1})\, \Phi_{nn}(z)\, G'(z) \left[I - H'(z)\right] \qquad (3.12)$$

Подставляя (3.12) с учетом (3.8″) в (3.11), замечаем, что полученное выражение есть квадратичный функционал относительно элементов $h_{ij}(z)_+$ матрицы $H^1(z)_+$ и значит необходимое условие его минимума

$$\delta J_x = 0 \qquad (3.13)$$

является в данном случае также и достаточным.

Для каждой оптимальной передаточной функции $\overset{0}{h}_{ij}(z)_+$ составим функцию сравнения:

$$h_{ij}(z)_+ = \overset{0}{h}_{ij}(z)_+ + \eta_{ij} \overset{1}{h}_{ij}(z)_+ \qquad (3.14)$$

где $\delta h_{ij}(z)_+ = \eta_{ij} \overset{1}{h}_{ij}(z)_+$ - произвольные рациональные физически реализуемые функции и η_{ij} – произвольные числа.

Имеем

$$J_x\left[H(z)\right] = J\left\{\left\| \overset{0}{h}_{ij}(z)_+ + \eta_{ij} \overset{1}{h}_{ij}(z)_+ \right\|_{k \times k}\right\} = J\left\{\left\|\eta_{ij}\right\|_{k\times k}\right\}$$

т.е. J_x можно рассматривать как функцию k^2 аргументов η_{ij}; по предположению эта функция имеет минимум в точке $\|\eta_{ij}\|_{k\times k}=0$, поэтому условия (3.13) принимают вид

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \eta_{ij}}\right|_{\|\eta_{ij}\|_{k\times k}=0} = 0 \qquad (3.13')$$

Система k^2 уравнений (3.13′) в соответствии с (3.11), (3.12) и (3.14) запишется так

$$\left.\frac{\partial J_x}{\partial \eta_{ij}}\right|_{\|\eta_{ij}\|_{k\times k}=0} = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{\partial\, Sp[\Phi_{xx}(z)]}{\partial h_{ij}(z^{-1})_+} h^1_{ij}(z^{-1})_+ \frac{dz}{z} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{\partial\, Sp[\Phi_{xx}(z)]}{\partial h_{ij}(z)_+} h^1_{ij}(z)_+ \frac{dz}{z} = 0$$

Вследствие равенства $Sp[\Phi_{xx}(z)] = Sp[\Phi_{xx}(z^{-1})]$ второй интеграл сводится к первому подстановкой $z_1 = z^{-1}$, поэтому достаточно приравнять к нулю один из интегралов

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{\partial\, S_p[\Phi_{xx}(z)]}{\partial h_{ij}(z^{-1})_+} h^1_{ij}(z^{-1}) \frac{dz}{z} = 0 \qquad (3.15)$$

Очевидно, что $h^1_{ij}(z^{-1})_+$ имеет полюсы только в области Γ^-. Потребуем, чтобы подынтегральное выражение в (3.15) было аналитическим внутри единичного круга:

$$\frac{1}{z}\;\frac{\partial\, S_p[\Phi_{xx}(z)]}{\partial h_{ij}(z^{-1})_+} = q_{ij}(z)_- \qquad (3.16)$$

где $q_{ij}(z)$ – неизвестные функции с полюсами в области Γ^-. Условие (3.16) является достаточным для выполнения равенства (3.15); с принятием очевидных обозначений перепишем его в матричной форме:

$$\frac{1}{z}\,\frac{\partial Sp[\Phi_{xx}(z)]}{\partial H^{1}(z^{-1})_{+}} = Q(z)_{-} \qquad (3.16')$$

Равенство (3.16′) есть решение вариационной задачи; из него единственным образом находится оптимальная передаточная матрица замкнутой системы.

В явной форме (3.16′) дает

$$G(z^{-1})\Phi_{nn}(z)G'(z)\left[z^{-1}H^{1\prime}(z)_{+} - I\right] = Q'(z)_{-} \qquad (3.17)$$

Мы получили систему k^2 уравнений типа Винера-Хопфа. Легко видеть, что эта система распадается на k независимых групп по k уравнений в каждой. Решение (3.17) есть одновременно решение задачи синтеза оптимальной устойчивой системы управления по заданным характеристикам помехи.

5. Оптимальное управление неустойчивым объектом.

В данном случае задача отыскания оптимальных характеристик системы управления может быть сведена к отысканию условного минимума функционала (3.11). Напомним, что передаточная матрица объекта $G(z)$ не имеет нулей на всей конечной комплексной плоскости и что $q^{-}(z) = \Delta_k^{-}(z) = (z-\mu_1)\dots(z-\mu_j)$, где $\mu_1 > |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_j| \geq 1$. Поэтому условия (3.8′) примут вид

$$\begin{aligned} H(z) &= z^{-1} H^{1}(z)_{+} \\ I - H(z) &= \Delta_k^{-}(z)\, H^{2}(z)_{+} \end{aligned} \qquad (3.8''')$$

Второе из условий (3.8‴) дает следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} (z-\mu_2)\dots(z-\mu_j)\,H^{2}(z)_{+} &= \frac{1}{z-\mu_1}\left[I - H(z)\right] \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ (z-\mu_1)\dots(z-\mu_{j-1})\,H^{2}(z)_{+} &= \frac{1}{z-\mu_j}\left[I - H(z)\right] \end{aligned} \qquad (3.18)$$

Левая часть в каждом из выражений (3.18) аналитична в области $(\Gamma^- + \Gamma)$, поэтому на основании интегральной теоремы Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[(z-\mu_1)\dots(z-\mu_{p-1})(z-\mu_{p+1})\dots(z-\mu_j)\right] H^2(z)_+ \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{I - H(z)}{z-\mu_p} \frac{dz}{z} = 0 \quad \text{для всех } p = 1,2,\dots,j \tag{3.19}$$

Последнее равенство не изменится от замены z на z^{-1}:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{I - H(z)}{z^{-1}-\mu_p} \frac{dz}{z} = 0 \tag{3.20}$$

Для дальнейшего целесообразно объединить (3.19) и (3.20) следующим образом

$$y^p = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[\frac{I - H(z)}{z-\mu_p} - \frac{I - H(z^{-1})}{z^{-1}-\mu_p}\right] \frac{dz}{z} = 0 \tag{3.21}$$

Здесь y^p есть, очевидно, $k\times k$-матрица. Для решения задачи синтеза оптимальной замкнутой системы нужно найти условный минимум функционала (3.11) при k^2 дополнительных ограничениях (3.21). Введем функционал

$$J_1 = \sum_{p=1}^{j} Sp\left[\Lambda^{p\prime} y^p\right] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{p=1}^{j} Sp\left[\frac{\Lambda^{p\prime}[I-H(z)]}{z-\mu_p} + \frac{\Lambda^{p\prime}[I-H(z^{-1})]}{z^{-1}-\mu_p}\right] \frac{dz}{z} = 0$$

здесь Λ^p, $p=1,..,j$ – матрицы множителей Лагранжа. Мы приходим к задаче отыскания безусловного минимума функционала

$$J = J_x + J_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Sp\left[\Psi(z)\right] \frac{dz}{z}$$

В качестве решения вариационной задачи получим систему k^2 уравнений типа Винера-Хопфа

$$G(z^{-1})\,\Phi_{nn}(z)\,G'(z)\left[z^{-1}H^{1\prime}(z)_+ - I\right] - \sum_{p=1}^{j}\frac{\Lambda^{p\prime}}{z^{-1}-\mu_p} = Q'(z)_- \tag{3.22}$$

относительно неизвестных элементов матрицы $H^1(z)_+$ и множителей Лагранжа λ^p_{st}.

Обычный метод решения подобных задач состоит в следующем. Из уравнений (3.22) находится $H^1(z)_+$ как функция параметров Λ^p. Затем решение подставляется в дополнительные условия (3.20) и находятся множители Лагранжа. Эти последние не нужны, однако, для определения оптимальных характеристик системы управления. Покажем, как можно избежать их определения.

Обратимся к равенствам (3.18). Из них могут быть получены jk^2 соотношений

$$I - H(\mu_e) = 0 \qquad e = 1, 2, \ldots, j \tag{3.23}$$

После того, как элементы $H^1(z)_+$ записаны в виде рациональных функций с неопределенными коэффициентами числителя [считаем, что для решения (3.22) используется метод неопределенных коэффициентов], применяются соотношения (3.23). Таким образом из общего числа неизвестных коэффициентов исключаются jk^2 величин. Уравнения для остальных коэффициентов получаются приравниванием нулю слагаемых правой части (3.22), соответствующих всем полюсам в Γ^+ за исключением $z = \mu_1^{-1}, \ldots, \mu_j^{-1}$. В эти уравнения не входят множители Лагранжа. Можно показать, что число полученных таким образом уравнений достаточно для всех неизвестных коэффициентов.

6. Воздействие белого шума на устойчивый популяционный объект. Двумерный случай.

Для конкретной постановки задачи синтеза оптимальной популяционной системы автоматической стабилизации (фиг. 2) необходимо знание вероятностных свойств помехи $n(s)$. Мы остановимся на простейшем виде матрицы спектральной плотности $\Phi_{nn}(z)$.

Многомерным белым шумом будем называть векторный случайный процесс, матрица спектральной плотности которого диагональна и не зависит от z:

$$\Phi_{nn}(z) = diag\{\varphi_1^2 \dots \varphi_k^2\}$$

При этом корреляционная матрица

$$R_{nn}(s) = diag\{\varphi_1^2 \delta_{0s} \dots \varphi_k^2 \delta_{0s}\}$$

где δ_{0s} – символ Кронекера.

Нам предстоит решить систему (3.18) для случая $k=2$, таким образом исследуемая популяция разбита на две возрастные группы. Как и в п°2 положим $\alpha_1 = 0$, поэтому

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение популяционной матрицы

$$|Iz - A| = \begin{vmatrix} z & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & z \end{vmatrix} = z^2 - \alpha_2\beta_1 = 0$$

имеет два корня $\mu_1 = \sqrt{\alpha_2\beta_1}$ и $\mu_2 = -\sqrt{\alpha_2\beta_1}$, равных по модулю. Из результатов главы 1 мы знаем, что отсутствие наибольшего по модулю положительного корня в уравнении $|Iz - A| = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда лишь один из коэффициентов рождаемости отличен от нуля. Именно с этим случаем мы и столкнулись в настоящем примере.

Уравнения Винера-Хопфа запишем в виде:

$$\frac{1}{z}\,\Phi(z)\,H^{1'}(z)_+ - \Phi(z) = Q'(z)_- \qquad (3.24)$$

где

$$\Phi(z) = G(z^{-1})\,\Phi_{nn}(z)\,G'(z)$$

Согласно теореме V. n°2 настоящей главы

$$G(z) = \frac{1}{z^2-\alpha_2\beta_1}\begin{bmatrix} z & \alpha_2 \\ \beta_1 & z \end{bmatrix}$$

Матрица $\Phi_{nn}(z)$, входящая в $\Phi(z)$, есть спектральная матрица двумерного белого шума

$$\Phi_{nn}(z) = diag\{\varphi_1^2\ \varphi_2^2\}$$

Обозначим $\sqrt{\alpha_2\beta_1} = \gamma$. Объект $G(z)$ будем считать устойчивым: $\gamma < 1$. Имеем

$$\Phi(z) = \frac{z^2}{(z^2-\alpha_2\beta_1)(1-z^2\alpha_2\beta_1)}\begin{bmatrix} z^{-1} & \alpha_2 \\ \beta_1 & z^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1^2 & \\ & \varphi_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & \beta_1 \\ \alpha_2 & z \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{\gamma^{-2}z^2}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}\begin{bmatrix} \varphi_1^2+\alpha_2^2\varphi_2^2 & z\alpha_2\varphi_2^2+z^{-1}\beta_1\varphi_1^2 \\ z\beta_1\varphi_1^2+z^{-1}\alpha_2\varphi_2^2 & \varphi_2^2+\beta_1^2\varphi_1^2 \end{bmatrix}$$

или, в сокращенной записи

$$\Phi(z) = -\frac{\gamma^{-2}z^2}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}\,\tilde{\Phi}(z), \quad \text{где} \quad \tilde{\Phi}(z) = \|\varepsilon_{ij}\|_{2\times 2}$$

$$\varepsilon_{11} = \varphi_1^2+\alpha_2^2\varphi_2^2 \qquad \varepsilon_{21} = z\beta_1\varphi_1^2 + z^{-1}\alpha_2\varphi_2^2$$

$$\varepsilon_{12} = z\alpha_2\varphi_2^2 + z^{-1}\beta_1\varphi_1^2 \qquad \varepsilon_{22} = \varphi_2^2+\beta_1^2\varphi_1^2$$

Формальное решение (3.24) есть

$$H^{1'}(z)_+ = z\left[\Phi^{-1}(z)\cdot Q'(z)_- + 1\right] \qquad (3.25)$$

Левая часть (3.25) есть устойчивая матрица: все ее полюсы лежат в области Γ^+; поэтому нас интересуют только устойчивые полюсы правой части: найдя их, мы сможем представить $H^1(z)_+$ в виде матрицы, все элементы которой есть отношения полиномов с неопределенными коэффициентами к произведению $\prod_{i=1}^{\alpha}(z-\nu_i)$, где ν_i — все полюсы правой части (3.25), по модулю меньшие единицы, и α — их общее число. Приведенные рассуждения составляют суть метода неопределенных коэффициентов, которым мы будем широко пользоваться.

Ясно далее, что $Q'(z)$ — устойчивых полюсов не имеет, поэтому остается искать их среди полюсов $z\Phi^{-1}(z)$:

$$z\Phi^{-1}(z) = \frac{z}{|\Phi(z)|}\left[-\frac{\gamma^{-2}z^2}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}\right]\begin{bmatrix} \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{21} & \varepsilon_{11} \end{bmatrix}$$

Определитель

$$|\Phi(z)| = \left[-\frac{\gamma^{-2}z^2}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}\right]^2 \begin{vmatrix} z^{-1} & \alpha_2 \\ \beta_1 & z^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1^2 & \\ & \varphi_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z & \beta_1 \\ \alpha_2 & z \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\gamma^{-2}z^2}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}\,\varphi_1^2\varphi_2^2$$

Окончательно

$$z\Phi^{-1}(z) = \frac{1}{\varphi_1^2\varphi_2^2}\begin{bmatrix} z\varepsilon_{22} & -z\varepsilon_{12} \\ -z\varepsilon_{21} & z\varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

Мы видим, что последнее выражение вовсе не имеет полюсов; значит в данном случае $\prod_{i=1}^{\alpha}(z-\nu_i)=1$ и искомую передаточную матрицу можно представить в виде

$$H^{1'}(z)_+ = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix},$$

где h_{ij} — числа.

Запишем уравнения типа Винера-Хопфа с использованием новых обозначений:

$$\frac{\gamma^{-2}z}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}\tilde{\Phi}(z)H^{1'}(z)_+ - \frac{\gamma^{-2}z^2}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}\tilde{\Phi}(z) = Q'(z)_- \quad (3.26)$$

1) Умножим (3.26) на $z-\gamma$ и устремим z к γ; матрица $Q'(z)_-$ содержит только неустойчивые полюсы, значит в произведении $(z-\gamma)Q'(z)_-$ не может иметь места сокращение множителя $(z-\gamma)$ со знаменателями элементов $Q'(z)_-$ и $\lim_{z\to\gamma}(z-\gamma)Q'(z)_-=0$; получим:

$$\tilde{\Phi}(\gamma)H^{1'}(\gamma)-\gamma\tilde{\Phi}(\gamma)=0 \qquad (3.27)$$

2) Умножим (3.26) на $z+\gamma$ и устремим z к $-\gamma$; рассуждения, аналогичные только что приведенным, позволяю- записать

$$\tilde{\Phi}(-\gamma)H^{1'}(-\gamma)+\gamma\tilde{\Phi}(-\gamma)=0 \qquad (3.28)$$

Итак, мы получили восемь скалярных уравнений для определения четырех неизвестных h_{ij}. Легко убедиться, что только четыре из них независимы, причем это обстоятельство носит принципиальный характер. В общем k-мерном случае матрица $\frac{1}{\varphi_1^2\cdots\varphi_k^2}\tilde{\Phi}(z)$ является присоединенной к матрице $\Phi^{-1}(z)$; поэтому ранг ее равен единице для всех $z=\mu_i$ и $z=\mu_i^{-1}$ $i=1,\dots,k$ где μ_i – собственные числа A. Действительно

$$\Phi^{-1}(z)=(Iz-A')\,diag\{\tfrac{1}{\varphi_i^2}\}(Iz^{-1}-A)$$

и значит

$$|\Phi^{-1}(z)|=|Iz-A|\cdot|Iz^{-1}-A|\cdot\frac{1}{\varphi_1^2\cdots\varphi_k^2}=$$

$$=(z-\mu_1)\dots(z-\mu_k)(z^{-1}-\mu_1)\dots(z^{-1}-\mu_k)\frac{1}{\varphi_1^2\cdots\varphi_k^2}$$

т.е. $|\Phi^{-1}(\mu_i)|=|\Phi^{-1}(\mu_i^{-1})|=0$, а для всякой вырожденной матрицы с дефектом $d=1$ присоединенная матрица имеет ранг $r=1$. То, что дефект матриц $\Phi^{-1}(\mu_i)$ и $\Phi^{-1}(\mu_i^{-1})$ всегда есть единица, легко доказывается с привлечением теоремы Сильвестра. Косвенное подтверждение этого факта следует еще и из того, что если дефект $\Phi^{-1}(\mu_i)$ и $\Phi^{-1}(\mu_i^{-1})$ больше единицы, то $\tilde{\Phi}(\mu_i^{\pm 1})$ – нулевые матрицы, и при корректной постановке задача синтеза теряет смысл. Итак, ранг матриц $\tilde{\Phi}(\mu_i^{\pm 1})$ равен 1; значит в каждой из них все строки пропорциональны некоторой одной, например, первой строке. Поэтому в выражениях типа (3.27) и (3.28), дающих в k-мерном случае k^2 скалярных уравнений, независимы только k из них.

Вернемся к двумерному случаю. Имея в виду сказанное выше, найдем скалярную форму (3.27) и (3.28):

$$
\begin{aligned}
&1.\ \varepsilon_{11} h_{11} + \varepsilon_{12} h_{12} - \gamma \varepsilon_{11} = 0\\
&2.\ \varepsilon_{11} h_{21} + \varepsilon_{12} h_{22} - \gamma \varepsilon_{12} = 0\\
&3.\ \varepsilon_{11} h_{11} - \varepsilon_{12} h_{12} + \gamma \varepsilon_{11} = 0\\
&4.\ \varepsilon_{11} h_{21} - \varepsilon_{12} h_{22} - \gamma \varepsilon_{12} = 0
\end{aligned}
$$

Здесь использованы равенства $\varepsilon_{12}(-\gamma) = -\varepsilon_{12}(\gamma) = -\varepsilon_{12}$ и $\varepsilon_{11} = Const(z)$. Совместное решение уравнений 1. и 3. дает

$$h_{11} = 0, \quad h_{12} = \frac{\gamma \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}} = \alpha_2,$$

а уравнений 2. и 4.

$$h_{22} = 0, \quad h_{21} = \gamma \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} = \beta_1$$

Искомая матрица $H^1(z)_+$ найдена: $H^1(z)_+ = A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix}$, значит

$$H(z) = z^{-1} H^1(z)_+ = z^{-1} A \tag{3.29}$$

Передаточная матрица корректирующего устройства согласно (3.6) есть

$$W(z) = G^{-1}(z)\,[I - H(z)]^{-1} H(z) = (Iz - A)\left[I - \tfrac{1}{z}A\right]^{-1} \tfrac{1}{z} A = A$$

Остается оценить точность работы системы.

В нашем случае

$$J_x = D_{x_1} + D_{x_2} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Sp\,[\Phi_{xx}(z)]\,\frac{dz}{z}$$

Найдем спектральную матрицу ошибки $\Phi_{xx}(z)$; по (3.5) имеем

$$x(z) = [I - H(z)]\, G(z) \cdot n(z);$$

подставляя сюда (3.29), получим

$$x(z) = \frac{1}{z}[Iz - A][Iz - A]^{-1} \cdot n(z) = \frac{1}{z} I\, n(z),$$

поэтому

$$\Phi_{xx}(z) = \Phi_{nn}(z) = diag\{\varphi_1^2\ \varphi_2^2\}$$

и

$$y_{x_{min}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Sp\,[\Phi_{nn}(z)]\, \frac{dz}{z} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$$

Таким образом показано, что сумма дисперсий компонент вектора ошибки $x(s)$ не зависит от абсолютной величины устойчивого корня $\gamma < 1$.

7. Воздействие белого шума на устойчивый популяционный объект. Многомерный случай.

Распространим полученные в n°6. результаты на случай k-мерного устойчивого объекта

$$G(z) = (Iz - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta_k} \tilde{G}(z)$$

Здесь $\tilde{G}(z)$ $k \times k$-матрица, присоединенная к $G^{-1}(z) = Iz - A$; ее вид установлен в n°2.

P. Если популяционный объект устойчив, а помеха $n(s)$ есть k-мерный белый шум со спектральной матрицей $\Phi_{nn}(z) = diag\{\varphi_i^2\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то популяционная матрица A удовлетворяет уравнениям типа Винера-Хопфа:

$$z^{-1} G(z^{-1})\, \Phi_{nn}(z)\, G'(z) \left[H^{1\prime}(z)_+ - zI\right] = Q'(z)_- \quad (3.18')$$

где $Q'(z)$ – произвольная неустойчивая матрица.

Доказательство. Подставим $H^1(z)_+ = A$ в левую часть (3.18'):

$$\frac{1}{z} G(z^{-1}) \Phi_{nn}(z) \left[Iz - A'\right]^{-1} \left[A' - Iz\right] = Q'(z)_-$$

Доказательство сведено к установлению неустойчивости выражения

$$-\frac{1}{z} G(z^{-1}) \Phi_{nn}(z)$$

Преобразуем матрицу $z^{-1} G(z^{-1})$ так:

$$z^{-1} G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{\prod_{i=1}^{k} (z^{-1} - \mu_i)} \tilde{G}(z^{-1}) = \frac{z^{k-1}}{\prod_{i=1}^{k} (1 - \mu_i z)} \tilde{G}(z^{-1})$$

Степень любого элемента $\tilde{G}(z^{-1})$ не превосходит $k-1$, поэтому наличие множителя z^{k-1} освобождает матрицу $z^{-1} G(z^{-1})$ от $k-1$-кратного полюса $z=0$. Оставшиеся полюсы $z = \mu_i^{-1}$ неустойчивы по условию. Умножение $z^{-1} G(z^{-1})$ справа на постоянную матрицу Φ_{nn} не приводит, очевидно, к появлению устойчивых полюсов. Теорема доказана.

Сохраняют силу все выводы, сделанные в п° 6. Так, корректор $W(z) = A$, а минимальное значение критерия точности

$$J_{x\,min} = \sum_{i=1}^{k} D_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^2$$

где φ_i^2, $i = 1, 2, .., k$, — диагональные элементы матрицы спектральной плотности Φ_{nn}.

8. Воздействие белого шума на неустойчивый популяционный объект. Двумерный случай

Как и прежде считаем помеху $n(s)$ белым шумом, а объект

$$G(z) = \frac{1}{z^2 - \alpha_2 \beta_1} \begin{pmatrix} z & \alpha_2 \\ \beta_1 & z \end{pmatrix};$$

однако здесь абсолютная величина корней характеристического уравнения $z^2-\alpha_2\beta_1=0$ больше или равна единице:

$$\sqrt{\alpha_2\beta_1}=|\mu_1|=|\mu_2|\geq 1$$

Для того, чтобы подчеркнуть это, обозначим $\sqrt{\alpha_2\beta_1}=\mu^{-1}$.
Уравнения (3.22) примут вид:

$$G(z^{-1})\,\Phi_{nn}(z)\,G'(z)\left[z^{-1}H^{1'}(z)_+-I\right]-\frac{\tilde{\Lambda}_1' z}{1-\mu^{-1}z}-\frac{\tilde{\Lambda}_2' z}{1+\mu^{-1}z}=Q'(z)_-$$

Введем матрицу $\Phi(z)=G(z^{-1})\,\Phi_{nn}(z)\,G'(z)$ и воспользуемся ее представлением из n°6:

$$\Phi(z)=-\frac{z^2\mu^2}{(z^2-\mu^{-2})(z^2-\mu^2)}\,\tilde{\Phi}(z)=-\frac{z^2\mu^2}{(z^2-\mu^{-2})(z^2-\mu^2)}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}$$

Обозначим далее $\Lambda_1'=\mu\tilde{\Lambda}_1'$ и $\Lambda_2'=\mu\tilde{\Lambda}_2'$. Уравнения типа Винера-Хопфа перепишутся так:

$$\Phi(z)\left[z^{-1}H^{1'}(z)_+-I\right]-\frac{\Lambda_1' z}{z-\mu}-\frac{\Lambda_2' z}{z+\mu}=Q'(z)_-$$

а формальное их решение

$$H^{1'}(z)_+=z\,\Phi^{-1}(z)\left[Q'(z)_-+\Phi(z)+\frac{\Lambda_1' z}{z-\mu}+\frac{\Lambda_2' z}{z+\mu}\right]$$

имеет, очевидно, только два устойчивых полюса в точках $z=\mu$ и $z=-\mu$, ибо, как мы уже знаем, выражение $z\,\Phi^{-1}(z)$ совсем не имеет полюсов. Поэтому будем искать передаточную матрицу в виде

$$H^{1'}(z)_+=\frac{1}{z^2-\mu^2}\begin{bmatrix}h_{11}(z) & h_{21}(z)\\ h_{12}(z) & h_{22}(z)\end{bmatrix},$$

где $h_{ij}(z)=h_{ij}^1 z^2+h_{ij}^2 z+h_{ij}^3$,

или

$$H^{1'}(z)=\frac{1}{z^2-\mu^2}\,\tilde{H}'(z)$$

Окончательный вид исходных матричных уравнений таков:

$$-\frac{z\mu^2}{(z^2-\mu^2)(z^2-\mu^{-2})}\tilde{\Phi}(z)\tilde{H}'(z)+\frac{z^2\mu^2}{(z^2-\mu^2)(z^2-\mu^{-2})}\tilde{\Phi}(z)-\frac{\Lambda_1' z}{z-\mu}-\frac{\Lambda_2' z}{z+\mu}=Q'(z)_- \quad (3.30)$$

В п°5 изложен подход к решению (3.30) методом неопределенных коэффициентов, при котором удается избежать нахождения множителей Лагранжа. В соответствии с этим методом обратимся сначала к равенствам (3.23), которые в данном случае есть

$$I-H(\pm\mu^{-1})=0 \qquad (3.31)$$

Как видно из (3.31), мы располагаем восьмью скалярными уравнениями; при этом

$$H(z)=z^{-1}H^1(z)_+=\frac{z^{-1}}{z^2-\mu^2}\tilde{H}(z) \qquad (3.32)$$

Подставим (3.32) в (3.31):

$$I-\frac{\mu}{\mu^{-2}-\mu^2}\tilde{H}(\mu^{-1})=0 \qquad (3.33)$$

$$I-\frac{\mu}{\mu^{-2}-\mu^2}\tilde{H}(-\mu^{-1})=0 \qquad (3.34)$$

Совместное решение (3.33) и (3.34) дает

1. $h_{11}^2=\mu^{-2}-\mu^2$, $h_{11}^3=-h_{11}^1\mu^{-2}$

2. $h_{22}^2=\mu^{-2}-\mu^2$, $h_{22}^3=-h_{22}^1\mu^{-2}$

3. $h_{12}^2=0$, $h_{12}^3=-h_{12}^1\mu^{-2}$

4. $h_{21}^2=0$, $h_{21}^3=-h_{21}^1\mu^{-2}$

Переходим ко второй части решения, связанной с уравнением (3.30)

1) Умножим (3.30) на $(z-\mu)^2$; ясно, что в произведе-

нии $(z-\mu)^2 Q'(z)$ сокращений не произойдет, ибо знаменатели элементов $Q'(z)$ содержат только неустойчивые полюса, а $\mu<1$. Поэтому, устремляя z к μ, получим

$$\tilde{\Phi}(\mu)\tilde{H}'(\mu)=0 \qquad (3.35)$$

2) Умножение (3.30) на $(z+\mu)^2$ при $z\to-\mu$ дает

$$\tilde{\Phi}(-\mu)\tilde{H}'(-\mu)=0 \qquad (3.36)$$

Равенства (3.35) и (3.36) дают еще восемь скалярных уравнений. Однако из них независимы только четыре, т.е. как раз столько, сколько необходимо для определения оставшихся коэффициентов; это следует из того, что ранг $\tilde{\Phi}(\pm\mu)$ равен единице [см. №6]

Раскроем (3.35) и (3.36), используя только первую строку $\tilde{\Phi}(\pm\mu)$:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}\cdot h_{11}(\mu)+\varepsilon_{12}h_{12}(\mu)=0 \\ \varepsilon_{11}\,h_{11}(-\mu)-\varepsilon_{12}\cdot h_{12}(-\mu)=0 \end{cases} \qquad (3.37)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}\cdot h_{21}(\mu)+\varepsilon_{12}\cdot h_{22}(\mu)=0 \\ \varepsilon_{11}\cdot h_{21}(-\mu)-\varepsilon_{12}\cdot h_{22}(-\mu)=0 \end{cases} \qquad (3.38)$$

Здесь использованы равенства $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{12}(\mu)=-\varepsilon_{12}(-\mu)$ и $\varepsilon_{11}=Const(z)$
Решение систем (3.37) и (3.38) дает четыре недостающих коэффициента:

5. $h^1_{11}=0$

$$h^1_{12}=\frac{\varepsilon_{11}\mu}{\varepsilon_{12}}=\frac{1}{\alpha_2}\,\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}$$

6. $h^1_{22}=0$

$$h^1_{21}=\frac{\varepsilon_{12}\mu}{\varepsilon_{11}}=\frac{1}{\beta_1}\,\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$$

Синтезируемая матрица найдена:

$$H^1(z)_+ = \frac{1}{z^2-\mu^2}\begin{pmatrix} [\mu^{-2}-\mu^2]z & \frac{1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}[z^2-\mu^{-2}] \\ \frac{1}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}[z^2-\mu^{-2}] & [\mu^{-2}-\mu^2]z \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что

$$\lim_{\substack{\mu\to 1\\ \alpha_2=\beta_1}} H^1(z)_+ = A \tag{3.39}$$

Известно [7], что матрица $H^1(z)_+$ непрерывна в функции от параметра μ; таким образом, (3.39) служит для подтверждения правильности найденной нами формы $H^1(z)_+$.

Остается найти $H(z)$, $W(z)$ и оценить точность работы системы. Имеем

$$H(z) = z^{-1}H^1(z)_+ = \begin{pmatrix} \frac{\mu^{-2}-\mu^2}{z^2-\mu^2} & \frac{1}{\alpha_2 z}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\frac{z^2-\mu^{-2}}{z^2-\mu^2} \\ \frac{1}{\beta_1 z}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\frac{z^2-\mu^{-2}}{z^2-\mu^2} & \frac{\mu^{-2}-\mu^2}{z^2-\mu^2} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

Для нахождения матрицы корректора перепишем (3.6) в виде

$$W(z) = G^{-1}(z)\,[I-H(z)]^{-1}H(z)$$

Из (3.40) находим

$$I-H(z) = \frac{z^2-\mu^{-2}}{z^2-\mu^2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha_2 z}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \\ -\frac{1}{\beta_1 z}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I-H(z)]^{-1} = \frac{z^2-\mu^2}{z^2-\mu^{-2}}\cdot\frac{1}{1-z^2\mu^2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_2 z}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \\ \frac{1}{\beta_1 z}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I-H(z)]^{-1}\cdot H(z)=\frac{z^2}{z^2-\mu^{-2}}\begin{pmatrix}\mu^{-2}z^2 & \frac{1}{\alpha_2 z}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\\ \frac{1}{\beta_1 z}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} & \mu^{-2}z^2\end{pmatrix}$$

Окончательно

$$W(z)=\frac{z^2}{z^2-\mu^{-2}}\begin{pmatrix}\mu^{-2}z^{-1}-\frac{\alpha_2}{\beta_1 z}\cdot\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} & \frac{1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}-\alpha_2\mu^{-2}z^{-2}\\ -\beta_1\mu^{-2}z^{-2}+\frac{1}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} & -\frac{\beta_1}{\alpha_2 z}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}+\mu^{-2}z^{-1}\end{pmatrix}$$

Отметим, что корректор неустойчив, ибо полюсы $z=\mu^{-1}$ и $z=-\mu^{-1}$ лежат в области Γ^-.

Проверкой, аналогичной (3.39)

$$\lim_{\substack{\mu\to 1\\ \alpha_2=\beta_1}} W(z)=A$$

убеждаемся, что матрица $W(z)$ найдена правильно.

Для нахождения суммы дисперсий компонент вектора $x(s)$ необходимо знать матрицу

$$\Phi_{xx}(z)=[I-H(z^{-1})]\,G(z^{-1})\,\Phi_{nn}(z)\,G'(z)\,[I-H'(z)]$$

У нас

$$[I-H(z)]\,G(z)=\frac{1}{z^2-\mu^2}\begin{pmatrix}z-\frac{\beta_1}{\alpha_2 z}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} & \alpha_2-\frac{1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\\ \beta_1-\frac{1}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} & z-\frac{\alpha_2}{\beta_1 z}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\end{pmatrix},$$

отсюда

$$[I-H(z^{-1})]\,G(z^{-1})\,\Phi_{nn}=\frac{1}{z^{-2}-\mu^2}\cdot\begin{pmatrix}\varphi_1^2\left[z^{-1}-\frac{\beta_1}{\alpha_2 z^{-1}}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right] & \varphi_2^2\left[\alpha_2-\frac{1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]\\ \varphi_1^2\left[\beta_1-\frac{1}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right] & \varphi_2^2\left[z^{-1}-\frac{\alpha_2}{\beta_1 z^{-1}}\cdot\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]\end{pmatrix}\quad(3.41)$$

Домножая (3.41) справа на $\{[I-H(z)]G(z)\}'=G'(z)[I-H'(z)]$, получим $\Phi_{xx}(z)$. Нам достаточно найти только след спектральной матрицы

$$Sp\left[\Phi_{xx}(z)\right]=\frac{1}{(z^{-2}-\mu^2)(z^2-\mu^2)}\left\{\varphi_1^2\left[z^{-1}-\frac{\beta_1}{\alpha_2 z^{-1}}\,\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]\left[z-\frac{\beta_1}{\alpha_2 z}\,\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]+\varphi_2^2\left[\alpha_2-\frac{1}{\alpha_2}\,\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\,\varphi_1^2\left[\beta_1-\frac{1}{\beta_1}\,\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]^2+\varphi_2^2\left[z^{-1}-\frac{\alpha_2}{\beta_1 z^{-1}}\,\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]\left[z-\frac{\alpha_2}{\beta_1 z}\,\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]\right\}$$

Подставим это выражение в интегральную формулу для критерия точности J_x; при этом исходный интеграл разобъем на два:

$$J_{x_{min}}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} Sp\left[\Phi_{xx}(z)\right]\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{\varphi_1^2\left[\beta_1-\frac{1}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]^2+\varphi_2^2\left[\alpha_2+\frac{1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]^2}{(z^{-2}-\mu^2)(z^2-\mu^2)z}\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{\varphi_1^2\left[z^{-1}-\frac{\beta_1}{\alpha_2 z^{-1}}\cdot\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]\left[z-\frac{\beta_1}{\alpha_2 z}\cdot\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]+\varphi_2^2\left[z^{-1}-\frac{\alpha_2}{\beta_1 z^{-1}}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]\left[z-\frac{\alpha_2}{\beta_1 z}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]}{(z^{-2}-\mu^2)(z^2-\mu^2)z}\,dz=$$

$$=J_{x_1}+J_{x_2}$$

Рассмотрим первый из этих интегралов. Он легко вычисляется с помощью основной теоремы о вычетах:

$$J_{x_1}=-\frac{\varphi_1^2\left[\beta_1-\frac{1}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]^2+\varphi_2^2\left[\alpha_2-\frac{1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]^2}{\mu^2(\mu^2-\mu^{-2})}$$

Второй интеграл удобно представить так

$$J_{x_2}=-\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{\varphi_1^2\left[z^2-\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\frac{\beta_1}{\alpha_2}-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}z^4+\frac{\beta_1^2}{\alpha_2^2}\frac{\varepsilon_{11}^2}{\varepsilon_{22}^2}z^2\right]+\varphi_2^2\left[z^2-\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}-\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}z^4+\frac{\varepsilon_{22}^2}{\varepsilon_{11}^2}\frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2}z^2\right]}{\mu^2 z^{-2}\left[z^2-\mu^{-2}\right]\left[z^2-\mu^2\right]z^3}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{\mu^2}\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{\varphi_1^2\left[z^2-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right)\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right)}{(z^2-\mu^2)(z^2-\mu^{-2})z}\,dz+\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{\varphi_2^2\left(z^2-\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}z^2\right)}{(z^2-\mu^2)(z^2-\mu^{-2})z}\,dz\right]=$$

$$=-\frac{1}{\mu^2}\left[J_{x_2}^1+J_{x_2}^2\right]$$

Интегралы $J_{x_2}^i$ также найдем по основной теореме о

Вычетах:

$$J^1_{x_2} = \frac{\varphi_1^2\left(\mu^2-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right)\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\mu^2\right)}{(\mu^2-\mu^{-2})\,2\mu^2} + \frac{\varphi_1^2\left(\mu^2-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right)\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\mu^2\right)}{-(\mu^2-\mu^{-2})(-2\mu)\mu} +$$

$$+\frac{\varphi_1^2\left[-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]}{(-\mu^2)(-\mu^{-2})} = \frac{\varphi_1^2\left(\mu^2-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right)\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\mu^2\right)}{(\mu^2-\mu^{-2})\mu^2} - \varphi_1^2\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}$$

$$J^2_{x_2} = \frac{\varphi_2^2\left(\mu^2-\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\mu^2\right)}{(\mu^2-\mu^{-2})\mu^2} - \varphi_2^2\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$$

Окончательно

$$J_{x_{min}} = \varphi_1^2\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\cdot\frac{1}{\mu^2} + \varphi_2^2\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\cdot\frac{1}{\mu^2} - \frac{\varphi_1^2\left(\mu^2-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right)\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\mu^2\right)}{\mu^4(\mu^2-\mu^{-2})} -$$

$$-\frac{\varphi_2^2\left(\mu^2-\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\mu^2\right)}{\mu^4(\mu^2-\mu^{-2})} - \frac{\varphi_1^2\left[\beta_1-\frac{1}{\beta_1}\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right]^2}{\mu^2(\mu^2-\mu^{-2})} - \frac{\varphi_2^2\left[\alpha_2-\frac{1}{\alpha_2}\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}\right]^2}{\mu^2(\mu^2-\mu^{-2})} \quad (3.42)$$

Как и прежде проведем проверку полученного результата, используя непрерывность $J_{x_{min}}$ в функции от параметра μ; для этого положим $\alpha_2=\beta_1$ (что, вообще говоря, не обязательно) и $\mu\to 1$; опуская выкладки, приведем конечный результат:

$$\lim_{\substack{\mu\to 1\\ \alpha_2=\beta_1}} J_{x_{min}} = \varphi_1^2+\varphi_2^2$$

Таким образом величина $J_{x_{min}}$ найдена верно.

Важно знать, каков характер зависимости $J_{x_{min}}(\mu^{-1})$. Для того, чтобы получить об этом представление, максимально упростим (3.42): пусть $\alpha_2=\beta_1$ $\sqrt{\alpha_2\beta_1}=\sqrt{\alpha_2^2}=\alpha_2=\gamma=\mu^{-1}$; при этом $\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}=1$ и

$$J_{x_{min}} = 2\gamma^2 = 2\mu^{-2}$$

Мы получили квадратичную зависимость. Заметим, что хотя $\beta_1>1$ не имеет биологического смысла, однако в данной ситуации это допущение не является принципиальным, т.к. служит единственно для выяснения качественной картины

9. Воздействие белого шума на неустойчивый популяционный объект. Вычислительная схема для многомерного случая.

К сожалению, при неустойчивом объекте не удается найти общий вид передаточной матрицы замкнутой системы даже при простейшем виде помехи (белом шуме). Однако исходную задачу синтеза можно свести к вычислительной процедуре, легко осуществимой на ЭВМ.

Уравнения (3.22) перепишем в виде:

$$\Phi(z)\left[z^{-1}H^{1\prime}(z)_{+}-I\right]-\sum_{p=1}^{t}\frac{z\tilde{\Lambda}_p^{\prime}}{1-\mu_p^{-1}z}=Q^{\prime}(z)_{-} \qquad (3.43)$$

где $\mu_1^{-1},\dots,\mu_t^{-1}$ - неустойчивые корни характеристического уравнения $\Delta_k(\mu)=0$ (обозначение их через обратные величины $\mu_1,\dots,\mu_t$ принято для того, чтобы подчеркнуть факт неустойчивости); t - число неустойчивых корней, и $\Phi(z)=G(z^{-1})\,\Phi_{nn}\cdot G^{\prime}(z)$.

Таким образом предполагается, что уже решена задача численного нахождения корней уравнения $|I\mu-A|=0$, причем все они пронумерованы в порядке убывания абсолютной величины:

$$\mu_1^{-1}>|\mu_2^{-1}|\geqslant|\mu_3^{-1}|\geqslant\dots\geqslant|\mu_t^{-1}|>|\lambda_{t+1}|\geqslant|\lambda_{t+2}|\geqslant\dots\geqslant|\lambda_k|$$

Здесь корни λ_s устойчивы: $|\lambda_s|<1$.

Вид заданной части системы, согласно <u>2.</u> (№2) есть

$$G(z)=\frac{1}{\Delta_k}\tilde{G}(z),$$

где

$\tilde{G}(z)$ - матрица, присоединенная к $G^{-1}(z)=Iz-A$, а

$$\Delta_k(z)=|Iz-A|=(z-\mu_1^{-1})\dots(z-\mu_t^{-1})(z-\lambda_{t+1})\dots(z-\lambda_k)$$

Поэтому

$$G(z^{-1})\,\Phi_{nn}\,G^{\prime}(z)=\frac{1}{\Delta_k(z^{-1})\Delta_k(z)}\tilde{G}(z^{-1})\,\Phi_{nn}\,\tilde{G}^{\prime}(z)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Delta_k(z^{-1})\Delta_k(z)} \tilde{\Phi}(z)$$

Легко проверить, что

$$|\Phi(z)| = \frac{\prod_{i=1}^{k} \varphi_i^2}{\Delta_k(z^{-1})\Delta_k(z)}$$

где φ_i^2 - диагональные элементы матрицы Φ_{nn}; значит, как и в двумерном случае, матрица $\tilde{\Phi}(z)$ только постоянным множителем $\prod_{i=1}^{k}\varphi_i^2$ отличается от присоединенной к $\Phi^{-1}(z)$. Возникает вторая численная задача: задача нахождения $\tilde{\Phi}(z)$. Элементы $\mathcal{E}_{ij}(z)$ матрицы $\tilde{\Phi}(z)$ содержат в общем случае положительные и отрицательные степени z с показателем не выше $k-1$; нахождение их вручную уже в трехмерном случае весьма затруднительно.

Положим в (3.43) $\Lambda_p = -\mu_p \tilde{\Lambda}$:

$$\Phi(z)\left[z^{-1}H^{1'}(z) - I\right] - \sum_{p=1}^{t} \frac{z\Lambda_p'}{z-\mu_p} = Q'(z)_- \qquad (3.44)$$

Формальное решение (3.44) есть

$$H^{1'}(z)_+ = z\Phi^{-1}(z)\left\{Q'(z)_- + \Phi(z) + \sum_{p=1}^{t}\frac{\Lambda_p' z}{z-\mu_p}\right\}$$

Выражение $z\Phi^{-1}(z)$ вообще не имеет полюсов. Действительно

$$z\Phi^{-1}(z) = z\left[Iz - A'\right]\Phi_{nn}^{-1}\left[Iz^{-1} - A\right] = \left[Iz - A'\right] diag\left\{\frac{1}{\varphi_i^2}\right\}\left[I - Az\right]$$

Поэтому все устойчивые полюсы формального решения совпадают с корнями уравнения

$$\prod_{p=1}^{t}(z-\mu_p) = 0$$

Имеем

$$H^{1'}(z)_+ = \frac{1}{\prod_{p=1}^{t}(z-\mu_p)}\tilde{H}'(z)$$

где $\tilde{H}(z) = \| h_{ij}(z)\|_{k\times k}$ и $h_{ij}(z) = \sum_{p=1}^{t+1} h_{ij}^{p}\cdot z^{t-p+1}$

Необходимо найти $(t+1)k^2$ коэффициентов h_{ij}^p. Первые tk^2 из них найдутся из tk^2 уравнений вида

$$I - H(\mu_j^{-1}) = 0 \qquad j=1,\dots,t$$

или

$$I - \frac{\mu_i}{M(\mu_i^{-1})}\tilde{H}'(\mu_i^{-1}) = 0 \quad i=1,\dots,t$$

Оставшиеся k^2 коэффициентов находятся из системы

$$\frac{1}{z}\,\frac{1}{\Delta_k(z^{-1})\Delta_k(z)\,M(z)}\,\tilde{\Phi}(z)\tilde{H}^{1\prime}(z) - \frac{1}{\Delta_k(z^{-1})\Delta_k(z)}\,\tilde{\Phi}(z) - \sum_{p=1}^{t}\frac{z\Lambda_p'}{z-\mu_p} = Q_-' \qquad (3.45)$$

Здесь обозначено $M(z)=\prod_{p=1}^{t}(z-\mu_p)$.

Используем то обстоятельство, что в знаменателе первого члена левой части (3.45) множитель $(z-\mu_p)$, $p=1,\dots,t$, содержится в квадрате.

1) Умножим (3.45) на $(z-\mu_p)^2$ и устремим z к μ_p; получим

$$\tilde{\Phi}(\mu_p)\tilde{H}'(\mu_p)=0 \quad p=1,\dots,t$$

Мы получили k^2t уравнений; однако из них независимы только kt, ибо, как было показано в п°6, матрица $\tilde{\Phi}(\mu_p)$ имеет ранг 1.

2) Умножим (3.45) на $(z-\lambda_j)$, $j=t+1,\dots,k$ и устремим z к λ_j; получим

$$\frac{1}{\lambda_j}\cdot\frac{1}{M(\lambda_j)}\,\tilde{\Phi}(\lambda_j)\tilde{H}'(\lambda_j) - \tilde{\Phi}(\lambda_j) = 0 \quad j=t+1,\dots,k$$

Мы располагаем еще $k^2(k-t)$ уравнениями, из которых независимы $k(k-t)$. Окончательно

$$I - \frac{\mu_i}{M(\mu_i^{-1})}\tilde{H}'(\mu_i^{-1})=0 \quad i=1,\dots,t \qquad (3.46)$$

$$\tilde{\Phi}(\mu_p)\tilde{H}'(\mu_p)=0 \qquad p=1,\dots,t \qquad (3.46')$$

$$\frac{1}{M(\lambda_j)}\tilde{\Phi}(\lambda_j)\tilde{H}'(\lambda_j) - \lambda_j\tilde{\Phi}(\lambda_j)=0 \qquad j=t+1,\dots,k \qquad (3.46'')$$

Таким образом получены необходимые $k^2(t+1)$ уравнений. Система (3.46) позволяет t коэффициентов в каждом из полиномов $h_{pq}(z)$ выразить с помощью формул Виета через первый h^1_{pq}. Подставив эти выражения в (3.46′) и (3.46″) получим k^2 неоднородных уравнений относительно k^2 коэффициентов $h^1_{p,q}$, $p,q = 1,2,\dots,k$. Имея в виду тот факт, что ранг матриц $\hat{\Phi}(\mu_p)$ и $\tilde{\Phi}(\lambda_j)$ равен единице, запишем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}(\mu_1)\, h^1_{p1} + \dots + \varepsilon_{1k}(\mu_1)\, h^1_{pk} = S_{p1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\varepsilon_{11}(\mu_t)\, h^1_{p1} + \dots + \varepsilon_{1k}(\mu_t)\cdot h^1_{pk} = S_{pt} \\
&\varepsilon_{11}(\lambda_{t+1})\, h^1_{p1} + \dots + \varepsilon_{1k}(\lambda_{t+1})\, h^1_{pk} = S_{pt+1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad p = 1,\dots,k \\
&\varepsilon_{11}(\lambda_k)\, h^1_{p1} + \dots + \varepsilon_{1k}(\lambda_k)\, h^1_{pk} = S_{pk}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Здесь S_{pq} – неоднородные члены, не содержащие неизвестных h_{pq}. Определитель

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}(\mu_1) & \dots & \varepsilon_{1k}(\mu_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{11}(\lambda_k) & \dots & \varepsilon_{1k}(\lambda_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

для случая простых собственных значений популяционной матрицы. При этом система (3.48) совместна и имеет единственное решение.

10. Синтез системы управления популяцией при неполной размерности вектора управления.

В уравнениях (3.3) положим

$$B = b = (1 \cdot \cdots \cdot) \quad \text{и} \quad C = C' = (1 \cdots 1)$$

тогда

$$\begin{aligned}
x_1(s+1) &= \alpha_2 x_2(s) + \dots + \alpha_k x_k(s) + n_1(s) + V(s) \\
x_2(s+1) &= \beta_1 x_1(s) + n_2(s) \\
&\dots\dots\dots \\
x_k(s+1) &= \beta_{k-1} x_{k-1}(s) + n_k(s) \\
g(s) &= x_1(s) + \dots + x_k(s)
\end{aligned} \tag{3.3'''}$$

Уравнения (3.3‴) описывают одномерную систему, ибо входной сигнал $V(s)$ и выходной $g(s)$ – скаляры.
В главе 2 показано, что система (3.3‴) полностью управляема и наблюдаема.

Мы остановимся только на случае $k=2$.
Имеем

$$\begin{aligned} x_1(s+1) &= \alpha_2 x_2(s) + n_1(s) + V(s) \\ x_2(s+1) &= \beta_1 x_1(s) + n_2(s) \\ g(s) &= x_1(s) + x_2(s) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Необходимо найти передаточную функцию заданной части; для этого применим к системе (3.49) одностороннее Z-преобразование при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} z\,x_1(z) &= \alpha_2 x_2(z) + n_1(z) + V(z) \\ z\,x_2(z) &= \beta_1 x_1(z) + n_2(z) \\ g(z) &= x_1(z) + x_2(z) \end{aligned}$$

Обозначим

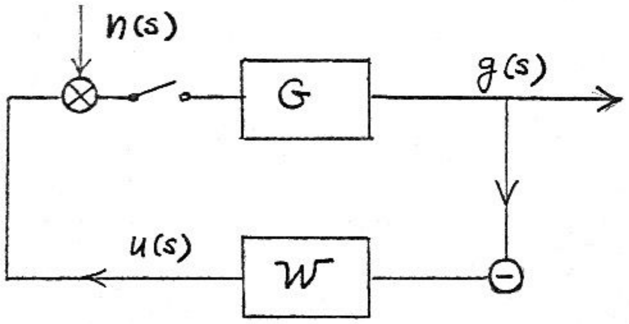
$$n(z) = n_1(z) + \frac{z+\alpha_2}{z+\beta_1}\, n_2(z), \tag{3.50}$$

тогда

$$g(z) = \frac{\beta_1 + z}{z^2 - \alpha_2\beta_1}\,[n(z) + V(z)]$$

т.е. передаточная функция $G(z) = \frac{\beta_1 + z}{z^2 - \alpha_2\beta_1}$

Положив $V(z) = -W(z)\,g(z)$, замкнем систему; одновременно мы получаем возможность построить структурную схему замкнутой системы управления



Фиг. 4

Как и прежде, помеху считаем некоррелированной:

$$R_{n_i n_j}(s) = \delta_{ij} \cdot \delta_{0s}\, \varphi_i^2$$

$$\Phi_{n_i n_i}(z) = \varphi_i^2 \quad ; \quad i = 1, 2.$$

В (3.50) обозначим $K(z) = \frac{\alpha_2 + z}{\beta_1 + z}$, тогда

$$\Phi_{nn} = \Phi_{n_1 n_1} + K(z^{-1})\,\Phi_{n_2 n_2}\,K(z) = \varphi_1^2 + \frac{z+\alpha_2}{z+\beta_1} \cdot \frac{z^{-1}+\alpha_2}{z^{-1}+\beta_1} \cdot \varphi_2^2$$

А) Будем считать передаточную функцию объекта устойчивой: $\gamma = \sqrt{\alpha_2 \beta_1} < 1$

Подчеркнем, что в данном случае, как и в ранее рассмотренных, объект принципиально не может быть сделан неминимальнофазовым, ибо $\beta_1 < 1$.

Передаточная функция замкнутой системы

$$H(z) = \frac{W(z)\, G(z)}{1 + W(z) G(z)}$$

должна удовлетворять условию физической реализуемости:

$$H(z) = z^{-1} H^1(z)$$

В силу устойчивости других ограничений вид заданной части не накладывает.

Уравнения (3.18) дают

$$G(z^{-1})\,\Phi_{nn}\,G(z)\,[z^{-1} H^1(z) - 1] = Q(z)_-$$

Обозначим $G(z^{-1})\,\Phi_{nn}\,G(z) = \Phi(z)$, тогда

$$\Phi(z)\,[z^{-1} H^1(z) - 1] = Q(z)_- \qquad (3.51)$$

Вид спектральной плотности

$$\Phi_{nn}(z) = \frac{(\beta_1+z)(\beta_1+z^{-1})\varphi_1^2 + (\alpha_2+z)(\alpha_2+z^{-1})\varphi_2^2}{(\beta_1+z)(\beta_1+z^{-1})}$$

позволяет найти

$$\Phi(z) = -\frac{z^2 \gamma^{-2} \{[\beta_1+z][\beta_1+z^{-1}]\varphi_1^2 + [\alpha_2+z][\alpha_2+z^{-1}]\varphi_2^2\}}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}$$

Формальное решение (3.51) есть

$$H^1(z) = z\left[\frac{Q(z)_-}{\Phi(z)} + 1\right],$$

поэтому необходимо найти устойчивые полюса $z\,\Phi^{-1}(z)$; последние совпадают с корнями уравнения

$$z\left\{[\beta_1+z][\beta_1+z^{-1}]\varphi_1^2 + [\alpha_2+z][\alpha_2+z^{-1}]\varphi_2^2\right\} = 0 \qquad (3.52)$$

или

$$z^2 + \frac{\vartheta+\xi}{\theta}z + 1 = 0$$

где

$$\vartheta = \varphi_1^2 + \alpha_2^2\varphi_2^2$$

$$\xi = \varphi_2^2 + \beta_1^2\varphi_1^2$$

$$\theta = \alpha_2\varphi_2^2 + \beta_1\varphi_1^2$$

Решение (3.52) есть

$$z_{1,2} = \frac{-[\beta_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1^2 + \alpha_2^2\varphi_2^2 + \varphi_2^2] \pm \sqrt{[\varphi_1^2(\beta_1^2-1) + \varphi_2^2(\alpha_2^2-1)]^2 + 4\varphi_1^2\varphi_2^2(\alpha_2-\beta_1)^2}}{2(\beta_1\varphi_1^2 + \alpha_2\varphi_2^2)}$$

Выражение под радикалом существенно положительно, значит оба корня z_1 и z_2 вещественны, причем один из них отрицателен; но, по теореме Виета

$$z_1 \cdot z_2 = 1,$$

значит и второй корень отрицателен.

Отметим, что только в частном случае $\beta_1 = \alpha_2 = 1$ будет $z_1 = z_2 = -1$, причем эти равенства не имеют биологического смысла, ибо $\beta_1 < 1$.

Итак

$$|z_1| < 1, \quad |z_2| > 1$$

Обозначим

$$|z_1| = \frac{1}{|z_2|} = t$$

Мы установили, что из двух полюсов $z = t$ и $z = t^{-1}$ формального решения (3.51) один неустойчив. В построении $H^1(z)_+$ участвует только устойчивый полюс:

$$H^1(z)_+ = \frac{a_0 z + a_1}{z + t} \tag{3.53}$$

Здесь a_0 и a_1 – неопределенные коэффициенты.
Матрица $\Phi(z)$ теперь может быть записана так:

$$\Phi(z) = -\frac{z\gamma^2\theta(z+t^{-1})(z+t)}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}$$

Подставим это выражение в (3.51) с учетом (3.53):

$$\frac{\gamma^2(z+t^{-1})\theta}{(z^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^{-2})}\left[z^2-(a_0-t)z+a_1\right] = Q(z)_- \tag{3.54}$$

1) Умножим (3.54) на $z-\gamma$ и устремим z к γ, получим

$$a_0\gamma + a_1 = \gamma^2 + \gamma t$$

2) Умножим (3.54) на $z+\gamma$ и устремим z к $-\gamma$:

$$-a_0\gamma + a_1 - \gamma^2 + \gamma t = 0$$

Совместное решение двух полученных уравнений дает искомые коэффициенты: $a_0 = t$, $a_1 = \gamma^2$

Окончательно

$$H^1(z)_+ = \frac{tz+\gamma^2}{z+t}, \quad H(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{tz+\gamma^2}{z+t}$$

$$W(z) = G^{-1}(z)\,\frac{H(z)}{1-H(z)} = \frac{tz+\gamma^2}{z+\beta_1}$$

Для оценки точности работы системы используем квадратичный функционал ошибки:

$$D_g = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \Phi_{gg}(z)\,\frac{dz}{z}$$

Спектральная плотность ошибки

$$\Phi_{gg}(z) = [1-H(z^{-1})]\,G(z^{-1})\,\Phi_{nn}(z)\,G(z)\,[1-H(z)] =$$

$$= \frac{(z^2-\gamma^2)\theta}{z^{-1}(z^{-1}+t)}\cdot\frac{z^{-1}+\beta_1}{z^{-2}-\gamma^2}\cdot\frac{z^{-1}(z+t)(z+t^{-1})}{(z+\beta_1)(z^{-1}+\beta_1)}\cdot\frac{z+\beta_1}{z^2-\gamma^2}\cdot\frac{z^2-\gamma^2}{z(z+t)} = t^{-1}\theta$$

Итак дисперсия ошибки постоянна и равна

$$J_{min} = D_g = \frac{[\beta_1^2\varphi_1^2+\alpha_2^2\varphi_2^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2]+\sqrt{[\varphi_1^2(1-\beta_1^2)+\varphi_2^2(1-\alpha_2^2)]^2+4\varphi_1^2\varphi_2^2(\alpha_2-\beta_1)^2}}{2}$$

Положим $\beta_1=\alpha_2$, тогда $J_{min}=\varphi_1^2+\varphi_2^2$

Ясно, что поскольку случай неполной размерности вектора управления является частным по отношению к рассмотренному в п°6, то J_{min} в функции от параметра β_1 имеет минимум в точке $\beta_1=\alpha_2$ и, наоборот, $J_{min}(\alpha_2)$ достигает минимума в точке $\alpha_2=\beta_1$.

B) Пусть теперь объект управления неустойчив.

Обозначим

$$\sqrt{\alpha_2\beta_1} = \mu^{-1} > 1,$$

тогда

$$G(z) = \frac{\beta_1+z}{z^2-\mu^{-2}}\ ;\quad G(z^{-1}) = -\frac{z^2\mu^2(z^{-1}+\beta_1)}{z^2-\mu^2}$$

Используя разработанную в A) систему обозначений, запишем

$$\Phi_{nn}(z) = \frac{\theta z^{-1}(z+t)(z+t^{-1})}{(z+\beta_1)(z^{-1}+\beta_1)}$$

Уравнения (3.22) примут вид

$$\Phi(z)\,[z^{-1}H^1(z)_+ - 1] - \frac{\lambda_1 z}{z-\mu} - \frac{\lambda_2 z}{z+\mu} = Q(z)_- \qquad (3.55)$$

где $$\Phi(z) = G(z^{-1})\,\Phi_{nn}(z)\,G(z) = -\frac{z\,\theta\mu^2(z+t)(z+t^{-1})}{(z^2-\mu^2)(z^2-\mu^{-2})}$$

Формальное решение (3.55) есть

$$H^1(z) = z\left[\frac{Q(z)_-}{\Phi(z)} + \left(\frac{\lambda_1 z}{z-\mu}+\frac{\lambda_2 z}{z+\mu}\right)\frac{1}{\Phi(z)} + 1\right]$$

Найдем дополнительные устойчивые полюса выражения

$$z\left(\frac{\lambda_1 z}{z-\mu}+\frac{\lambda_2 z}{z+\mu}\right)\frac{1}{\Phi(z)}$$

Имеем

$$\frac{z}{\Phi(z)}\left(\frac{\lambda_1 z}{z-\mu}+\frac{\lambda_2 z}{z+\mu}\right)=-\frac{[\lambda_1 z(z+\mu)+\lambda_2 z(z-\mu)](z^2-\mu^{-2})}{\theta\mu^2(z+t)(z+t^{-1})}$$

Значит в формальном решении присутствует только один устойчивый полюс $z=t$, доставляемый ему числителем функции $\Phi(z)$. Положим поэтому

$$H^1(z)=\frac{a_0 z+a_1}{z+t}$$

Соотношения

$$1-H(t\mu^{-1})=0$$

дают

$$H(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{tz+\mu^{-2}}{z+t},$$

что совпадает с формой передаточной функции замкнутой системы в устойчивом случае.

Легко проверить, что уравнение

$$-\frac{\theta\mu^2(z+t)(z+t^{-1})}{(z^2-\mu^2)(z^2-\mu^{-2})}\cdot\frac{a_0 z+a_1}{z+t}+\frac{\theta\mu^2 z(z+t)(z+t^{-1})}{(z^2-\mu^2)(z^2-\mu^{-2})}-\frac{\lambda_1 z}{z-\mu}-\frac{\lambda_2 z}{z+\mu}=\underline{Q}(z)$$

служит для определения множителей Лагранжа λ_1 и λ_2, которые не требуются.

Минимальная дисперсия ошибки

$$Y_{min}=D_g=\frac{[\beta_1^2\varphi_1^2+d_2^2\varphi_2^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2]+\sqrt{[\varphi_1^2(\beta_1^2-1)+\varphi_2^2(d_2^2-1)]^2+4\varphi_1^2\varphi_2^2(d_2-\beta_1)^2}}{2}$$

Однако если в этом выражении положить $d_2=\beta_1$, то $Y_{min}=2\mu^{-2}=2\gamma$. Напомним, что равенство $d_2=\beta_1$ влечет за собой условие $\beta_1>1$, не имеющее биологического смысла. Как и прежде рассмотренный прием является математической абстракцией; он способствует выяснению качественной картины роста Y_{min} с параметром γ.

Заключение

Основным итогом настоящей работы следует считать вывод о возможности подхода к исследованию биологических популяций с общих позиций теории автоматического управления. Несмотря на то, что сделан лишь первый шаг в направлении развития методов управления популяцией, можно говорить также о некотором практическом значении данной работы. Так, постоянное возрастное распределение, около которого поддерживается численность популяции (глава 3), само может быть решением вариационной задачи на максимум прибыли и таким образом рассмотренная задача автоматической стабилизации приобретает конкретный экономический характер.

Необходимо отметить следующее обстоятельство. Помимо управления „правой частью" мы всегда можем в некотором диапазоне регулировать также и параметры системы. Поэтому получает оправдание подход, при котором почти все рассуждения строятся на основе допущения о простоте собственных значений популяционной матрицы. Можно показать, что требование отсутствия кратных корней у характеристического уравнения (1.6') сводится к требованию отличия от нуля некоторого определителя, причем это всегда может быть достигнуто малым изменением коэффициентов системы разностных уравнений. Таким образом, основные теоремы кроме простоты обладают еще и общностью, тогда как принципиальное наличие кратных корней привело бы к значительному усложнению методов.

Далее, в главе 3 приведено полное решение задачи оптимального поддержания численности вымирающей популяции; при этом управление, очевидно, считается положительным. Однако в большинстве случаев мы располагаем только возможностью отбора особей из популяции; такое управление имеет смысл лишь в неустойчивом случае. Хотя задача управления неустойчивым объектом и не доводится до конца, предложенная в главе 3 вычислительная схема ввиду сделанного выше замечания о кратных корнях может рассматриваться как полное решение задачи управления растущей популяцией.

Литература

1. Bellman R. Introduction to Matrix Analysis, Mc Grow-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1960
2. Volterra V. Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Paris, Gauthier Villars, 1931
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, Наука, Москва 1967
4. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление, Физматгиз, Москва, 1961
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, 1948
6. Glass D.V. Population Policies and Movements in Europe, Oxford, Clarendon Press, 1940
7. Катковник В.Я., Полуэктов Р.А. Многомерные дискретные системы управления, Наука, Москва, 1966
8. Kostizin V.A. Biologie mathématique, Paris, ~~1939~~ Hermann 1939)
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, Наука, Москва, 1965
10. Leslie P.H. On the use of matrices in certain population mathematics 30, Biometrika, 1945
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, Москва, 1953
12. Frazer R.A., Duncan W.J., Collar A.R Elementary Matrices, Camb. Univ. Press
13. Халмош П. Конечномерные векторные пространства, Москва, 1963